BAC3

Groupes et représentations :
I. Groupe des rotations à 3 dimensions, groupe de Lorentz et groupe de Poincaré

Marc Henneaux

Remerciements

Je remercie Geoffrey Compère et Christiane Schomblond pour leur lecture attentive de ces notes et leurs commentaires particulièrement utiles.

Chapitre 1

Représentations de $SO(3)$

1.1 $SO(3)$ et $SU(2)$

1.1.1 Le groupe $SO(3)$ - Rappels

Définitions

Le groupe $O(3)$ est le groupe des transformations orthogonales réelles à 3 dimensions, c'-à-d. l'ensemble de toutes les transformations linéaires de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ qui laissent la forme quadratique $x^2 + y^2 + z^2$ invariante. C'est un sous-groupe de $GL(3, \mathbb{R})$. La matrice A d'une transformation orthogonale doit satisfaire à

$$A\,A^t = I = A^t\,A \tag{1.1}$$

où A^t est la matrice transposée. A noter que $O(3)$ est aussi un sous-groupe de $U(3)$ puisque toute matrice réelle orthogonale est unitaire ($A^t = A^\dagger$ si $A = A^*$). De (1.1) on tire

$$(\det A)^2 = 1 \;\Leftrightarrow\; \det A = \pm 1 \tag{1.2}$$

Le groupe $SO(3)$ est le sous-groupe de $O(3)$ qui contient les transformations orthogonales préservant l'orientation d'espace (on suppose qu'on a donné une orientation à $\mathbb{R}^3$), c'-à-d. dont le déterminant est égal à 1,

$$\det A = 1. \tag{1.3}$$

En terme des éléments de matrice A_{ij}, les conditions (1.1) et (1.3) s'écrivent

$$\sum_k A_{ik} A_{jk} = \delta_{ij} \tag{1.4}$$

$$\sum_k A_{ki} A_{kj} = \delta_{ij} \tag{1.5}$$

$$\varepsilon^{mnp} A_{im} A_{jn} A_{kp} = \varepsilon_{ijk} \tag{1.6}$$

Une transformation appartient à $SO(3)$ ssi les 3 vecteurs $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ définis par les lignes de la matrice correspondante, $(e_i)_j = A_{ij}$, (ou de manière équivalente, les 3 vecteurs $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3\}$ définis par les colonnes de la matrice A_{ij}, $(f_j)_i = A_{ij}$) forment une base orthonormée d'orientation positive.

Soient G_1 et G_2 deux groupes. *Le produit direct* $G_1 \times G_2$ est le groupe dont les éléments sont les couples (g_1, g_2) avec $g_i \in G_i$. Le produit est donné par la formule

$$(g_1, g_2)(g_1', g_2') = (g_1 g_1', g_2 g_2'). \tag{1.7}$$

Si e_1 et e_2 sont les neutres respectifs de G_1 et G_2, le neutre de $G_1 \times G_2$ est (e_1, e_2) et les sous-ensembles $\bar{G}_1 \equiv G_1 \times \{e_2\}$ et $\bar{G}_2 \equiv \{e_1\} \times G_2$ sont des sous-groupes de $G_1 \times G_2$ respectivement isomorphes (voir plus bas) à G_1 et G_2, qui commutent. Tout élément de $G_1 \times G_2$ se décompose de manière unique comme le produit $\bar{g}_1 \bar{g}_2$ d'un élément de $\bar{G}_1$ par un élément de $\bar{G}_2$. On identifie très souvent G_1 et $\bar{G}_1 \subset G_1 \times G_2$ ainsi que G_2 et $\bar{G}_2 \subset G_1 \times G_2$.

Une application f du groupe G dans le groupe G' s'appelle *homomorphisme de G dans G'* si elle préserve la loi de groupe, c'-à-d. si

$$f(g_1 g_2) = f(g_1) f(g_2) \qquad \forall g_1, g_2 \in G. \tag{1.8}$$

On appelle l'image inverse du neutre e' de G' le *noyau de l'homomorphisme*. On le note $Ker\, f$, $Ker\, f = f^{-1}(e')$. Un homomorphisme bijectif s'appelle un *isomorphisme*. On dit alors que *G et G' sont isomorphes*, ce que l'on note $G \simeq G'$. Un isomorphisme de G dans lui-même s'appelle un *automorphisme*.

Le groupe $O(3)$ s'obtient en ajoutant à $SO(3)$ l'inversion spatiale P de matrice

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{1.9}$$

dont le carré est l'identité, $P^2 = I$. L'ensemble à deux éléments $\{I, P\}$ constitue un groupe isomorphe à $\mathbb{Z}_2 \equiv \{1, -1\}$. L'application $(Q, A) \mapsto QA$ avec $Q \in \{I, P\}$, $A \in SO(3)$ et $QA \in O(3)$ est un homomorphisme de $\mathbb{Z}_2 \times SO(3)$ dans $O(3)$ car P commute avec $SO(3)$. C'est un isomorphisme. On a ainsi $O(3) \simeq SO(3) \times \mathbb{Z}_2$ [1].

Note : si G_1 et G_2 sont des groupes continus dépendant respectivement de n_1 et n_2 paramètres, le produit direct $G_1 \times G_2$ dépend de $n_1 + n_2$ (et non $n_1 n_2$) paramètres. Ainsi, $SO(3) \times U(1)$ dépend de 4 (et non 3) paramètres, tandis que $SO(3) \times SO(3)$ dépend de 6 (et non 9) paramètres.

$SO(3)$ et rotations

Géométriquement, les éléments de $SO(3)$, appelés parfois transformations orthogonales propres, sont les rotations de l'espace à trois dimensions. En effet, la matrice A d'une transformation orthogonale étant réelle, possède des valeurs propres qui sont réelles ou, si elles sont complexes, qui viennent par paires de nombres complexes conjugués. En outre, puisque A est unitaire, ces valeurs

1. A noter que cette propriété n'est pas vraie en dimension paire (voir exercices).

propres sont sur le cercle unité. Les valeurs propres d'une transformation orthogonale quelconque sont donc $\epsilon, e^{i\varphi}, e^{-i\varphi}$, avec $\epsilon = \pm 1$. Pour une transformation orthogonale propre, $\epsilon = 1$ et les valeurs propres sont $1, e^{i\varphi}, e^{-i\varphi}$. La direction propre associée à la valeur propre $+1$ définit l'axe de rotation. Soit $\mathbf{n}$ un vecteur de norme 1 dirigé le long de l'axe de rotation ($\mathbf{n}$ est défini au signe près). Soient $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ deux vecteurs dans le plan orthogonal à $\mathbf{n}$ tels que l'ensemble $\{\mathbf{n}, \mathbf{a}, \mathbf{b}\}$ forme une base orthonormée d'orientation positive. Dans la base $\{\mathbf{n}, \mathbf{a}, \mathbf{b}\}$, la matrice A prend la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \tag{1.10}$$

puisque le plan orthogonal à $\mathbf{n}$ est envoyé sur lui-même. La matrice B est une matrice 2×2 orthogonale qui est donc donnée par

$$B = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \tag{1.11}$$

pour un certain angle θ. Cet angle est, en fait, le même angle φ que ci-dessus, $\theta = \varphi$. La transformation orthogonale est par conséquent la rotation $R(\mathbf{n}, \varphi)$ d'axe $\mathbf{n}$ et d'angle φ. A noter que la trace de A est égale à

$$TrA = 1 + 2\cos\varphi \tag{1.12}$$

$SO(3)$ est un sous-groupe normal de $O(3)$

Soit G un groupe, $H \subset G$ un sous-groupe de G. On appelle classe latérale à gauche gH de H par l'élément $g \in G$ l'ensemble des produits $gH = \{gh | h \in H\}$. De même, les classes latérales à droites sont données par $Hg = \{hg | h \in H\}$, $g \in G$. En général, $gH \neq Hg$.

Le sous-groupe H est appelé un sous-groupe *normal* (ou *distingué*, ou encore *invariant*) ssi $gH = Hg$ $\forall g \in G$. Cette définition est équivalente à

$$gHg^{-1} = H \qquad \forall g \in G. \tag{1.13}$$

Donc, pour un sous-groupe normal, les classes latérales à gauche et à droite de H par n'importe quel élément $g \in G$ coïncident,

$$\forall g \in G,\ \forall h \in H, \exists h' \in H : gh = h'g. \tag{1.14}$$

Les sous-groupes triviaux $\{e\}$ et G de G sont évidemment normaux. On les appelle *sous-groupes normaux triviaux*. Un groupe est *simple* s'il ne possède aucun sous-groupe normal non trivial.

Les sous-groupes G_1 et G_2 du produit direct $G_1 \times G_2$ sont normaux. En particulier, $\mathbb{Z}_2$ et $SO(3)$ sont des sous-groupes normaux de $O(3)$.

Centre de $SO(3)$

On appelle *centre* Z_G du groupe G l'ensemble de tous les éléments de G qui commutent avec chaque élément de G,

$$g \in Z_G \quad \Leftrightarrow \quad g\bar{g} = \bar{g}g \quad \forall \bar{g} \in G. \tag{1.15}$$

Le centre d'un groupe est évidemment un sous-groupe normal abélien.

On calcule facilement le centre de $SO(3)$.

Si la matrice R appartient au centre de $SO(3)$, alors R doit être diagonale comme on le voit à partir des conditions

$$R\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix} R \tag{1.16}$$

et

$$R\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} R \tag{1.17}$$

qui expriment la commutativité avec les rotations de 180 degrés autour des axes Ox et Oz. On trouve ensuite, à partir de

$$R\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha & 0\\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha & 0\\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} R \qquad \forall\alpha \tag{1.18}$$

et

$$R\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \sin\beta & -\sin\beta\\ 0 & \sin\beta & \sin\beta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \sin\beta & -\sin\beta\\ 0 & \sin\beta & \sin\beta\end{pmatrix} R \qquad \forall\beta \tag{1.19}$$

que R est multiple de l'identité, $R = \lambda I$ ($\lambda \in \mathbb{R}$). La condition $\det R = 1$ implique enfin $\lambda = 1$: le centre de $SO(3)$ est trivial et réduit à l'identité. En fait, $SO(3)$ est simple (voir exercices).

Composantes connexes de $O(3)$

Soit G un groupe continu de transformations d'un espace vectoriel. On notera que le produit de deux transformations et l'opération de prendre l'inverse sont des opérations continues.

On appelle composante connexe d'un élément g l'ensemble des éléments de G qui peuvent être reliés à g par une courbe continue [2]. On note G_0 la composante connexe de l'identité. On a

Théorème : La composante connexe de l'identité G_0 est un sous-groupe normal de G.

Preuve : soient g_1 et g_2 deux éléments de G_0. Soient $g_1(t)$ et $g_2(t)$, $t \in [0,1]$, des courbes continues joignant ces points à l'identité :

$$g_1(t) \in G_0 \quad \forall t \in [0,1], \qquad g_1(0) = I, \qquad g_1(1) = g_1;$$

$$g_2(t) \in G_0 \quad \forall t \in [0,1], \qquad g_2(0) = I, \qquad g_2(1) = g_2.$$

2. Connexité veut toujours dire ici "connexité par arcs".

La courbe $t \mapsto g_1(t)\ (g_2(t))^{-1}$ ($t \in [0,1]$) est une courbe continue qui joint l'identité ($t=0$) à $g_1\, g_2^{-1}$ ($t=1$). Il en résulte que le produit $g_1\, g_2^{-1}$ appartient à la composante G_0 connexe de l'identité $\forall g_1, g_2 \in G_0$, qui est donc un sous-groupe. Ce sous-groupe est normal car si $g \in G_0$ et $g(t)$ est une courbe continue qui joint l'identité à g, alors, quel que soit $s \in G$, la courbe continue $s\, g(t)\, s^{-1}$ joint l'identité à $s\, g s^{-1}$ qui appartient ainsi à G_0. Donc $s\, G_0\, s^{-1} = G_0\ \forall s \in G$, ce qui démontre que G_0 est un sous-groupe invariant.

On montre aussi

Théorème : Les composantes connexes de G sont les classes latérales de la composante G_0 connexe de l'identité.

Preuve : soient $g_1, g_2 \in G$ deux éléments dans la même composante connexe ; soit $\gamma(t)$ une courbe continue reliant g_1 à g_2, $\gamma(0) = g_1$, $\gamma(1) = g_2$. Alors $g_1^{-1}\, \gamma(t)$ est une courbe continue reliant l'identité à $g_1^{-1}\, g_2$, ce qui montre que $g_1^{-1}\, g_2 \in G_0$: g_1 et g_2 sont dans la même classe latérale de G_0. Inversément, si g_1 et g_2 sont dans la même classe latérale de G_0, on a $g_2 = g_1\, h$ pour un certain $h \in G_0$, et donc on peut relier g_1 à g_2 par la courbe continue $g_1\, h(t)$ où $h(t)$ est une courbe continue reliant I à h : g_1 et g_2 sont donc dans la même composante connexe.

On dit qu'un groupe est connexe s'il se réduit à sa composante connexe à l'identité : tout élément peut alors être continûment déformé en l'identité [3]. Le groupe $SO(3)$ est connexe. En effet, toute transformation orthogonale propre est une rotation $R(\mathbf{n}, \varphi)$ autour d'un certain axe $\mathbf{n}$ par un certain angle φ. La courbe $R(\mathbf{n}, t\varphi)$ ($t \in [0,1]$) est une courbe continue reliant l'identité à la rotation $R(\mathbf{n}, \varphi)$.

Il en résulte que $O(3)$ possède deux composantes connexes : la composante connexe à l'identité $SO(3)$ et sa classe latérale $P\, SO(3)$ constituée des transformations orthogonales de déterminant -1.

Paramétrisations

Puisque toute transformation orthogonale propre est une rotation $R(\mathbf{n}, \varphi)$ autour d'un certain axe $\mathbf{n}$ par un certain angle φ, on peut voir $SO(3)$ comme la boule B de rayon π de l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ centrée à l'origine, avec les points antipodaux du bord de B (sphère de rayon π) identifiés. Le point $\mathbf{x} \neq 0$ de B est associé à la rotation $R\left(\frac{\mathbf{x}}{||\mathbf{x}||}, ||\mathbf{x}||\right)$, tandis que l'origine est associée à l'identité. L'identification des points antipodaux du bord provient de l'égalité $R(\mathbf{n}, \pi) = R(-\mathbf{n}, \pi)$. [Inclure figure.]

Une autre paramétrisation commode de $SO(3)$ est donnée par les angles d'Euler. Toute rotation $R(\mathbf{n}, \varphi)$ est égale au produit

$$R(\mathbf{n}, \varphi) = R_z(\alpha)\, R_x(\beta)\, R_z(\gamma) \tag{1.20}$$

où $R_z(\alpha) \equiv R(\mathbf{1}_z, \alpha)$ etc. Les angles d'Euler α, β, γ ont pour domaine de varia-

3. Ceci implique la connexité topologique standard : les seuls sous-ensembles de G qui sont à la fois ouverts et fermés sont G lui-même et l'ensemble vide.

tion respectifs :

$$\alpha \in [0, 2\pi], \qquad \beta \in [0, \pi], \qquad \gamma \in [0, 2\pi] \tag{1.21}$$

(voir cours de BA1 et BA2).

1.1.2 Le groupe $SU(2)$ - Rappels

Définitions

Le groupe unitaire $U(2)$ est le groupe des transformations linéaires de l'espace vectoriel complexe à deux dimensions qui préserve la forme hermitienne $|x|^2 + |y|^2$. En terme de matrices, U est unitaire ssi

$$U\,U^\dagger = I = U^\dagger\,U. \tag{1.22}$$

Les lignes (et les colonnes) de U définissent une base orthonormée. De (1.22), il vient

$$|\det U|^2 = 1. \tag{1.23}$$

Le groupe $SU(2)$ est le sous-groupe des transformations unitaires de déterminant unité,

$$U \in SU(2) \quad \Leftrightarrow \quad U\,U^\dagger = I = U^\dagger\,U, \;\; \det U = 1. \tag{1.24}$$

Connexité

Toute transformation unitaire U est diagonalisable par changement de base unitaire, c-à-d. peut s'écrire

$$U = SDS^\dagger$$

où $S \in U(2)$ et $D \in U(2)$ est diagonale,

$$D = \begin{pmatrix} e^{i\varphi_1} & 0 \\ 0 & e^{i\varphi_2} \end{pmatrix}.$$

Si $U \in SU(2)$, $\det D = 1$ et on peut supposer $\varphi_2 = -\varphi_1$. En posant

$$\Phi = \begin{pmatrix} \varphi_1 & 0 \\ 0 & \varphi_2 \end{pmatrix},$$

on a

$$U = e^{iH} \tag{1.25}$$

où la matrice $H = S\,\Phi\,S^\dagger$ est hermitienne et de trace nulle dans le cas de $SU(2)$,

$$H = H^\dagger \qquad U \in U(2) \text{ ou } SU(2) \tag{1.26}$$

$$TrH = 0 \qquad U \in SU(2) \tag{1.27}$$

La courbe continue $U(t) = e^{itH} = S\,e^{it\Phi}\,S^\dagger$, $t \in [0, 1]$, est dans le groupe $U(2)$ ($SU(2)$ si $U \in SU(2)$) $\forall t$ et relie l'identité à U. Les groupes $U(2)$ et $SU(2)$ sont donc connexes.

$SU(2)$ et la 3-sphère S_3

Une autre manière de voir que $SU(2)$ est connexe consiste à observer qu'on peut identifier $SU(2)$ à la 3-sphère. En effet, pour que

$$U = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

soit un élément de $SU(2)$, il faut que $|\alpha|^2+|\beta|^2 = 1$, $|\gamma|^2+|\delta|^2 = 1$, $\alpha\gamma^*+\beta\delta^* = 0$ et $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$. Ces conditions impliquent $\gamma = -\beta^*$ et $\delta = \alpha^*$. Donc toute matrice de $SU(2)$ s'écrit

$$U = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta^* & \alpha^* \end{pmatrix}$$

où α et β sont deux nombres complexes tels que $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$. En d'autres termes, un élément de $SU(2)$ est déterminé de manière unique (et non redondante) par 4 nombres réels α_1, α_2, β_1, β_2 ($\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2$, $\beta = \beta_1 + i\beta_2$) tels que $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \beta_1^2 + \beta_2^2 = 1$, c'-à-d. par un point de la 3-sphère S_3.

La 3-sphère étant connexe, il en résulte que $SU(2)$ est connexe. En fait, la 3-sphère est simplement connexe : toute courbe fermée sur la 3-sphère peut être continûment déformée en un point, comme dans l'espace euclidien (voir exercices). Donc, $SU(2)$ est simplement connexe.

Centre de $SU(2)$

Le centre de $SU(2)$ est égal au sous-groupe $\mathbb{Z}_2$ contenant l'identité I et moins l'identité $-I$. Le centre de $U(2)$ est isomorphe à $U(1)$ et donné par les multiples $e^{i\varphi}I$ de l'identité par des nombres de module 1 (exercices).

$SU(2)$ et $U(2)$

On peut préciser le lien entre $U(2)$ et $SU(2)$ de la manière suivante. Si G est un groupe et H un sous-groupe, l'espace quotient $G/H = \{gH, g \in G\}$ des classes latérales n'est lui-même naturellement muni d'une structure de groupe que si H est un sous-groupe normal. Dans ce cas, le produit entre classes latérales est défini par

$$(g_1H)(g_2H) = (g_1g_2)H$$

et ne dépend pas du choix des représentants : si $g_1H = g_1'H$ (c'-à-d. $g_1'g_1^{-1} \in H$) et $g_2H = g_2'H$, alors $(g_1g_2)H = (g_1'g_2')H$.

Considérons le produit direct $SU(2)\times U(1)$. Soit $\mathbb{Z}_2$ le sous-groupe contenant les couples $(I, 1)$ et $(-I, -1)$. Ce sous-groupe est normal [4].

Théorème :

$$U(2) \simeq \frac{SU(2) \times U(1)}{\mathbb{Z}_2} \tag{1.28}$$

4. Attention : le même symbole peut désigner des groupes différents. Le $\mathbb{Z}_2$ ici n'est pas le même que le $\mathbb{Z}_2$ discuté ci-dessus, même s'ils sont isomorphes.

Démonstration : Afin de démontrer ce théorème, nous allons utiliser un résultat général sur les homomorphismes de groupes.

Théorème : Soit $f : G \to G'$ un homomorphisme de groupes. Alors

- $f(e) = e'$ (où e est le neutre de G et e' celui de G') ;
- $f(g^{-1}) = (f(g))^{-1}$
- si H est un sous-groupe de G, alors $f(H)$ est un sous-groupe de G' ; en particulier $Imf \equiv f(G)$ est un sous-groupe de G' ;
- si H est un sous-groupe normal de G, alors $f(H)$ est un sous-groupe normal de $f(G)$;
- le noyau $Kerf$ de l'homomorphisme est un sous-groupe normal de G ;
- un homomorphisme est injectif ssi $Kerf = \{e\}$;
- on a l'égalité
$$Imf \simeq \frac{G}{Kerf}. \tag{1.29}$$

Démonstration : La première propriété découle de $f(e)f(e) = f(e^2) = f(e)$ qui implique, en multipliant par l'inverse de $f(e)$ (dans G'), $f(e) = e'$. La deuxième propriété s'en suit directement : $f(g)f(g^{-1}) = f(gg^{-1}) = f(e) = e'$. Pour la troisième propriété, on observe que si $h_1, h_2 \in H$, alors $f(h_1)$ et $f(h_2)$ $\in f(H)$ et $f(h_1)f(h_2) = f(h_1h_2) \in f(H)$, $e' = f(e) \in f(H)$ $(e \in H)$ et $(f(h_1))^{-1} = f(h_1^{-1}) \in f(H)$. Donc $f(H)$ est un sous-groupe de G'. Si en outre H est un sous-groupe normal de G, alors $f(H)f(g) = f(Hg) = f(gH) = f(g)f(H)$ $\forall g \in G$ et donc $f(H)$ est un sous-groupe normal de $f(G)$. Montrons maintenant que $Kerf$ est un sous-groupe normal de G : $Kerf$ est un sous-groupe de G car si g_1 et $g_2 \in Kerf$ $(f(g_i) = e')$ alors $g_1g_2^{-1} \in Kerf$ puisque $f(g_1g_2^{-1}) = f(g_1)f(g_2^{-1}) = f(g_1)(f(g_2))^{-1} = e'$. D'autre part, $g\,Kerf\,g^{-1} \subset Kerf \;\; \forall g \in G$ (car $f(g\,Kerf\,g^{-1}) = f(g)\{e'\}f(g^{-1}) = \{e'\}$). De même, $g^{-1}\,Kerf\,g \subset Kerf$ (remplacer g par g^{-1}, ce qui implique $Kerf \subset g\,Kerf\,g^{-1}$. Ces deux inclusions entraînent $Kerf = g\,Kerf\,g^{-1}$: $Kerf$ est un sous-groupe normal.

Démontrons l'avant-dernière assertion. Si l'homomorphisme f est injectif, alors $Kerf = \{e\}$. Inversément, supposons $Kerf = \{e\}$. Si $f(g_1) = f(g_2)$, alors $e' = f(g_1)(f(g_2))^{-1} = f(g_1g_2^{-1})$. Il en résulte $g_1g_2^{-1} = e$ et donc $g_1 = g_2$: l'homomorphisme f est injectif.

Il nous reste à démontrer (1.29). On définit une application ψ du groupe quotient $\frac{G}{Kerf}$ dans Imf de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \psi : \qquad & \frac{G}{Kerf} \to Imf \\ & [g] \mapsto \psi([g]) = f(g) \end{aligned}$$

où $[g]$ est la classe latérale $g\,Kerf = Kerf\;g$. Cette définition ne dépend pas du choix du représentant g dans la classe $[g]$: si $[h] = [g]$, c-à-d. $h = gm$ avec $m \in Kerf$, alors $f(h) = f(gm) = f(g)f(m) = f(g)e' = f(g)$. L'application ψ est un homomorphisme : $\psi([g_1][g_2]) = f(g)$ (où g est un représentant de la classe $[g_1][g_2]) = f(g_1g_2)$ (on peut prendre $g = g_1g_2$ par définition du produit des classes) $= f(g_1)f(g_2) = \psi([g_1])\psi([g_2])$. L'homomorphisme ψ est évidemment surjectif sur Imf. Il est aussi injectif car son noyau est $Kerf$, qui est le neutre du groupe quotient $\frac{G}{Kerf}$.

Revenons à la démonstration de (1.28). Soit f l'application $SU(2)\times U(1) \to U(2)$ définie par $f((S,e^{i\varphi})) = e^{i\varphi}S$ ($S \in SU(2)$, $e^{i\varphi} \in U(1)$). On voit facilement que f est un homomorphisme surjectif. Son noyau est égal à $\mathbb{Z}_2 = \{(I,1),(-I,-1)\}$. L'application de la formule (1.29) conduit au résultat annoncé.

1.1.3 Isomorphisme $SO(3) \simeq \frac{SU(2)}{\mathbb{Z}_2}$

Dans cette section, nous établissons l'important théorème

Théorème : Le groupe $SO(3)$ est isomorphe au quotient de $SU(2)$ par son centre,

$$SO(3) \simeq \frac{SU(2)}{\mathbb{Z}_2}. \tag{1.30}$$

La démonstration du théorème se fait en trois temps.

1. Dans un premier temps, on construit un homomorphisme bien choisi $f : SU(2) \to SO(3)$.
2. On montre ensuite que cet homomorphisme f est surjectif.
3. On montre enfin que le noyau de f est égal à $\mathbb{Z}_2$. L'application du théorème vu précédemment implique alors le résultat.

Le centre $\mathbb{Z}_2$ contient la matrice identité $I_{2\times 2}$ et $-I_{2\times 2}$. En terme de la 3-sphère, le changement de signe des composantes d'une matrice $U \in SU(2)$ revient à passer au point antipodal. Le groupe $SO(3)$ est donc homéomorphe à l'espace projectif des directions dans R^4, c'-à-d. à la 3-sphère avec points antipodaux identifiés.

Matrices hermitiennes de trace nulle et $\mathbb{R}^3$

Les matrices de Pauli $\sigma_x \equiv \sigma_1$, $\sigma_y \equiv \sigma_2$, $\sigma_z \equiv \sigma_3$ sont données par

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{1.31}$$

Ces matrices sont hermitiennes et de trace nulle,

$$\sigma_k^\dagger = \sigma_k, \quad Tr\,\sigma_k = 0. \tag{1.32}$$

En outre, elles obéissent à l'algèbre

$$\sigma_i\,\sigma_j = \delta_{ij}\,I + i\,\varepsilon_{ijk}\,\sigma_k. \tag{1.33}$$

[Note : sauf mention contraire, on somme toujours sur les indices répétés, dont la position (en haut ou en bas) n'est pas cruciale dans ce chapitre car on travaille dans l'espace euclidien.] Si a^k et b^k sont deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$, cette relation peut se récrire

$$(\vec{a}\cdot\vec{\sigma})(\vec{b}\cdot\vec{\sigma}) = (\vec{a}\cdot\vec{b})I + i(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{\sigma} \tag{1.34}$$

où $\vec{a}\cdot\vec{\sigma} = a^i\sigma_i$. [On utilise indifféremment les notations $\vec{b}$ ou $\mathbf{b}$ pour désigner un vecteur de $\mathbb{R}^3$.]

Théorème : toute matrice hermitienne 2×2 de trace nulle est une combinaison linéaire à coefficients réels des matrices de Pauli,

$$X^\dagger = X \quad \text{et} \quad Tr\, X = 0 \quad \Rightarrow \quad X = \vec{x}\cdot\vec{\sigma} \tag{1.35}$$

avec les x^k réels.

Ce théorème est évident, si

$$X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

est une matrice hermitienne, alors a et d sont réels et b et c sont complexes conjugués. La condition $Tr\, X = 0$ impose $a + d = 0$. On peut donc écrire $X = \vec{x}\cdot\vec{\sigma}$ avec $x^1 = Re(b)$, $x^2 = -Im(b)$ et $x^3 = a$. On peut ainsi identifier l'espace des matrices hermitiennes de trace nulle à l'espace euclidien R^3.

On a explicitement

$$X = \begin{pmatrix} x^3 & x^1 - ix^2 \\ x^1 + ix^2 & -x^3 \end{pmatrix} \tag{1.36}$$

ce qui montre

$$\det X = -\left(\sum_i (x^i)^2\right). \tag{1.37}$$

Première étape : Définition de l'homomorphisme f

Soit $U \in SU(2)$. Soit X une matrice hermitienne de trace nulle. On définit

$$X' = UXU^\dagger. \tag{1.38}$$

La matrice X' est hermitienne ($X'^\dagger = UX^\dagger U^\dagger = X'$) et de trace nulle ($Tr\, X = Tr\,(UXU^\dagger) = Tr\,(XU^\dagger U) = Tr\, X = 0$). On a donc $X' = \vec{x}'\cdot\vec{\sigma}$ pour un certain vecteur $\vec{x}'$ de $\mathbb{R}^3$.

La correspondance $X \mapsto X'$ est linéaire, ce qui implique que les composantes x'^i de $\vec{x}'$ dépendent linairement des composantes x^i de $\vec{x}$,

$$x'_i = f(U)_{ij}\, x_j \tag{1.39}$$

où la matrice $f(U)$ (qui est une matrice 3×3) dépend de U. On a $X' = x'_i\,\sigma_i = UXU^\dagger = U(x_i\,\sigma_i)U^\dagger = x_i\, U\sigma_i U^\dagger$ et donc $f(U)_{ij}\, x_j\,\sigma_i = x_i\, U\sigma_i U^\dagger$ pour tout x_i, ce qui donne

$$f(U)_{ji}\,\sigma_j = U\sigma_i U^\dagger. \tag{1.40}$$

Les éléments de matrice $f(U)_{ji}$ sont des polynômes quadratiques en les éléments de matrice de U et leurs complexes conjugés, et, en particulier, sont des fonctions continues de ces éléments de matrice. En prenant par exemple la composante (11) de cette équation matricielle et en utilisant le fait que seul $(\sigma_3)_{11} \neq 0$ (et $= 1$) on obtient de cette équation $f(U)_{3i} = \sum_{\alpha,\beta=1,2} U_{1\alpha}(\sigma_i)_{\alpha\beta} U^*_{1\beta}$. Spécialisant à $i = 3$ on obtient $f(U)_{33} = |U_{11}|^2 - |U_{12}|^2$.

Plus généralement, en multipliant (1.40) par σ_m et en prenant la trace, on obtient

$$f(U)_{mi} = \frac{1}{2} Tr\left(U\sigma_i U^\dagger \sigma_m\right) \tag{1.41}$$

oú on a utilisé $Tr(\sigma_j\sigma_m) = 2\delta_{jm}$. [Cette relation est compatible avec ce qu'on a trouvé pour $f(U)_{33}$ car U est unitaire et donc $|U_{21}|^2 = 1 - |U_{11}|^2$, $|U_{22}|^2 = 1 - |U_{12}|^2$.]

La matrice $f(U)$ définit une transformation orthogonale car

$$\det X' = \det(UXU^\dagger) = \det X$$

et donc $\sum_i (x'^i)^2 = \sum_i (x^i)^2$. En outre, $f(U)$ appartient à la composante connexe de l'identité de $O(3)$, c-à-d. à $SO(3)$, comme le montre un argument de continuité. Soit $U(t)$ une courbe continue reliant I à U ($SU(2)$ est connexe) et soit $f(U(t))$ la courbe correspondante dans $O(3)$. Cette courbe est continue et relie l'identité ($f(I_{2\times 2}) = I_{3\times 3}$ car $X = X'$ pour $U = I$) à $f(U)$. Donc $f(U) \in SO(3)$. ["L'image continue d'un ensemble connexe est connexe."]

L'application f qui envoie $U \in SU(2)$ sur la matrice $f(U) \in SO(3)$,

$$\begin{aligned} f: \quad & SU(2) \to SO(3) \\ & U \mapsto f(U) \end{aligned}$$

est l'homomorphisme cherché. C'est bien un homomorphisme de groupes car si la matrice $(O_1)_{ij}$ est associée à U_1 et si $(O_2)_{ij}$ est associée à U_2,

$$(O_1)_{ji}\,\sigma_j = U_1\sigma_i U_1^\dagger, \qquad (O_2)_{ji}\,\sigma_j = U_2\sigma_i U_2^\dagger,$$

alors

$$U_1U_2\sigma_i(U_1U_2)^\dagger = U_1U_2\sigma_i U_2^\dagger U_1^\dagger = U_1\sigma_j U_1 (O_2)_{ji} = (O_1)_{kj}(O_2)_{ji}\sigma_k = (O_1O_2)_{ki}\sigma_k :$$

au produit U_1U_2 est associée la rotation O_1O_2, $f(U_1U_2) = f(U_1)f(U_2)$.

Deuxième étape : L'homomorphisme f est surjectif

Soit $R(\vec{n}, \varphi)$ une rotation quelconque. On peut l'écrire comme le produit de deux réflexions S, T dans des plans se coupant le long de l'axe de rotation et faisant un angle égal à la moitié de l'angle de rotation, $R(\vec{n}, \varphi) = ST$ avec

$$\begin{aligned} S &: \vec{x} \to \vec{x}' = \vec{x} - 2(\vec{x}\cdot\vec{m})\,\vec{m} \\ T &: \vec{x} \to \vec{x}' = \vec{x} - 2(\vec{x}\cdot\vec{q})\,\vec{q} \end{aligned}$$

où $\vec{m}$ et $\vec{q}$ sont des vecteurs de norme un orthogonaux aux plans de réflexion respectifs. Soit $M = \vec{m} \cdot \vec{\sigma}$ et $Q = \vec{q} \cdot \vec{\sigma}$. Les matrices M et Q sont hermitiennes, de trace nulle, de carré 1 ($(\vec{m} \cdot \vec{\sigma})(\vec{m} \cdot \vec{\sigma}) = (\vec{m} \cdot \vec{m})I = I$) et de déterminant -1. Sous la réflexion S, la matrice hermitienne de trace nulle associée à $\vec{x}$ se transforme comme suit

$$S : X \to X' = -MXM$$

car $X' = X - (XM + MX)M = X - XM^2 - MXM = -MXM$. De même,

$$T : X \to X' = -QXQ$$

A noter que les matrices $\pm M$ et $\pm Q$ liées aux deux orientations possibles de $\vec{m}$ et $\vec{q}$, engendrent les mêmes réflexions. Sous le produit ST des réflexions S et T (avec T agissant en premier !), la matrice X se transforme comme

$$ST : X \to X' = (MQ)X(QM).$$

La matrice $U = MQ$ appartient à $SU(2)$ car $U^\dagger = QM$, $UU^\dagger = MQQM = I$ et $\det(MQ) = \det(M)\ \det(Q) = (-1)^2 = 1$. Comme le produit ST des réflexions S et T est la rotation $R(\vec{n}, \varphi)$ donnée, on voit que $R(\vec{n}, \varphi) = f(U)$. La rotation $R(\vec{n}, \varphi)$ étant quelconque, on en conclut que l'homomorphisme f est surjectif. En fait, $R(\vec{n}, \varphi) = f(\pm U)$ puisque U est défini au signe près.

On montre aux exercices que

$$U = \exp\left(-i\vec{n} \cdot \vec{\sigma}\ \frac{\varphi}{2}\right) \tag{1.42}$$

$$= \cos\frac{\varphi}{2}\, I - i(\vec{n} \cdot \vec{\sigma}) \sin\frac{\varphi}{2}, \tag{1.43}$$

l'ambiguïté du signe de U venant du fait que $\varphi \to \varphi + 2\pi$ conduit à $U \to -U$.

Troisième étape : Calcul du noyau de f

Calculons l'image inverse de la rotation unité. Il s'agit de trouver la matrice $U \in SU(2)$ telle que $X = UXU^\dagger$ pour toute matrice hermitienne de trace nulle, c'-à-d. $XU = UX$. La matrice U commute donc aussi avec $\exp(iX)$ c'-à-d. avec tout élément de $SU(2)$: U appartient au centre de $SU(2)$ et donc $U = \pm I$. Ceci démontre l'assertion $Ker f = \mathbb{Z}_2$ et achève la preuve de l'isomorphisme (1.30).

Commentaires

1. On ne peut pas lever l'ambiguïté de signe de manière algébriquement cohérente, en ce sens qu'il n'existe pas d'homomorphisme $g : SO(3) \to SU(2)$ tel que $f \circ g = Id$, où Id est l'identité sur $SO(3)$, $Id(R) = R \quad \forall R \in SO(3)$ (g correspondrait à un choix de signe fait de manière à préserver le produit et serait bien sûr injectif sans être surjectif). En effet, si g existait, on devrait avoir $g(I_{3\times 3}) = I_{2\times 2}$ car g doit être un homomorphisme. Soit R la rotation d'angle π autour de l'axe z,

$$R = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

dont le carré est égal à $I_{3\times 3}$. C'est le produit d'une réflexion dans le plan perpendiculaire à l'axe Ox par une réflexion dans le plan perpendiculaire à l'axe Oy. Les matrices unitaires dont l'image par f est R sont donc données par $U_1 = \sigma_1\sigma_2 = i\sigma_3$ et $U_2 = -i\sigma_3$. Il s'agit de choisir $g(R) = U_1$ ou $g(R) = U_2$, de manière compatible avec le produit (g doit être un homomorphisme). Mais quel que soit le choix fait, on obtient une contradiction car $U_1^2 = U_2^2 = -I_{2\times 2}$ alors qu'il faut $g(R)^2 = g(R)g(R) = g(R^2) = g(I_{3\times 3}) = I_{2\times 2}$.

2. Soit $V \subset SO(3)$ un voisinage de la rotation $R(\vec{n},\varphi)$. Il possède deux images inverses $\bar{V}_1$ et $\bar{V}_2$ qui sont distinctes si V est suffisamment petit et qui sont des voisinages dans $SU(2)$ des deux images inverses $\pm U$ de $R(\vec{n},\varphi)$. Si $\gamma(t)$ est une courbe continue dans V passant par $R(\vec{n},\varphi)$, elle possède deux pré-images distinctes continues, l'une dans $\bar{V}_1$ passant par U et l'autre dans $\bar{V}_2$ passant par $-U$.
3. Le groupe $SO(3)$ n'est pas simplement connexe. Les courbes fermées $R(\vec{n}, 2\pi t)$ ($t \in [0,1]$) correspondant à un tour complet autour de l'axe $\vec{n}$ ne sont pas contractibles à un point. En effet, toute courbe continue $\gamma(t)$ dans $SO(3)$ partant de l'identité $I_{3\times 3}$ se relève de manière unique en une courbe continue $\Gamma(t)$ dans $SU(2)$ partant de l'identité $I_{2\times 2}$ telle que $\gamma = f\circ\Gamma$ ($t \mapsto \gamma(t)$ est la même chose que $t \mapsto \Gamma(t) \mapsto f(\Gamma(t))$). On le voit en utilisant la remarque précédente de proche en proche. Si $\gamma(t)$ est fermée ($\gamma(1) = I_{3\times 3}$), deux cas sont possibles : ou bien $\Gamma(t)$ revient en $I_{2\times 2}$ et est aussi fermée ($\Gamma(1) = I_{2\times 2}$) ; ou bien $\Gamma(t)$ se termine en l'autre pré-image de $I_{3\times 3}$, à savoir $-I_{2\times 2}$ ($\Gamma(1) = -I_{2\times 2}$) et n'est pas fermée. Si $\gamma(t)$ est contractible à un point, alors on est dans le premier cas, car on ne peut pas passer continûment de $-I_{2\times 2}$ à $I_{2\times 2}$. La condition est également suffisante car $SU(2)$ est simplement connexe. Les courbes fermées du deuxième cas (et uniquement celles-là) ne sont par contre pas contractibles.

   Un chemin fermé correspondant à un tour complet appartient au deuxième cas. On le voit par exemple aisément pour les rotations autour de l'axe z, $R(\vec{1}_z, 2\pi t)$, qui se relèvent sur la courbe

$$\begin{pmatrix} \cos\pi t - i\sin\pi t & 0 \\ 0 & \cos\pi t + i\sin\pi t \end{pmatrix}$$

   se terminant en $-I_{2\times 2}$. [Inclure figure.]
4. Deux tours complets successifs, par exemple le double-tour $R(\vec{1}_z, 4\pi t)$, définissent une courbe contractible. On le voit par l'argument précédent ($\Gamma(t)$ revient à l'identité) ou directement à l'aide de la représentation de $SO(3)$ en terme de boule de rayon π dans R^3. [Inclure figure.] On dit que "le groupe fondamental de $SO(3)$ est $\mathbb{Z}_2$".
5. Bien que $SU(2)$ et $SO(3)$ ne soient pas isomorphes, il y a isomorphisme local de voisinages suffisamment petits de l'identité. On le voit en prenant $R(\vec{n},\varphi) = I_{3\times 3}$ dans le raisonnement du point **2**. Si $g(R)$ est la pré-image de $R \in V$ qui se trouve dans le voisinage $\bar{V}_1$ de l'identité, on a $g(R_1R_2) = g(R_1)g(R_2)$ lorsque le produit R_1R_2 appartient à V.

1.2 Groupe $SO(3)$ et algèbre de Lie $so(3)$

1.2.1 Algèbres de Lie

Définitions

Une *algèbre de Lie* A est un espace vectoriel muni d'une opération $[\cdot, \cdot]$ ("crochet de Lie") jouissant des propriétés suivantes :

- linéarité : $[x, a_1 y_1 + a_2 y_2] = a_1[x, y_1] + a_2[x, y_2]$;
- antisymétrie : [x,y] = - [y,x] (ce qui implique la linéarité en le premier argument) ;
- identité de Jacobi : $[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$

$\forall x, y, z, y_1, y_2 \in A$ et $\forall a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ (algèbre de Lie réelle) ou $\mathbb{C}$ (algèbre de Lie complexe).

Une algèbre de Lie est abélienne ssi $[x, y] = 0 \ \forall x, y \in A$. Une algèbre de Lie linéaire est une sous-algèbre de l'algèbre de Lie $gl(n)$ des matrices $n \times n$ munie du commutateur des matrices. Ce sont les seules que nous considérerons.

Deux algèbres de Lie A_1 et A_2 sont *isomorphes* ssi il existe une application linéaire bijective $f : A_1 \to A_2$ qui préserve le crochet de Lie,

$$f([x, y]_1) = [f(x), f(y)]_2 \quad \forall x, y \in A_1. \tag{1.44}$$

Soit $\{T_i\}$ $(i = 1, \cdots, n)$ une base de A. Comme $[T_i, T_j]$ appartient à A, on peut écrire

$$[T_i, T_j] = C^k{}_{ij} T_k \tag{1.45}$$

On appelle les $C^k{}_{ij}$ les *constantes de structure* de A (dans la base $\{T_i\}$). On a

$$C^k{}_{ij} = -C^k{}_{ji} \quad \text{(antisymétrie)}, \tag{1.46}$$

$$C^k{}_{ij} C^j{}_{lm} + C^k{}_{lj} C^j{}_{mi} + C^k{}_{mj} C^j{}_{il} = 0 \quad \text{(Jacobi)}. \tag{1.47}$$

Deux algèbres de Lie A_1, A_2 sont isomorphes si elles ont même dimension et si on peut trouver une base dans chacune d'elles où les constantes de structure sont égales. L'application qui envoie les vecteurs de base T_k de A_1 sur les vecteurs de base $\bar{T}_k$ de A_2 (et étendue par linéarité) préserve clairement le crochet.

Exemples

1. $so(n)$: espace vectoriel des matrices réelles $n \times n$ antisymétriques,

$$\omega \in so(n) \Leftrightarrow \omega^t = -\omega.$$

C'est une algèbre de Lie car le commutateur de deux matrices antisymétriques est une matrice antisymétrique. La dimension de cette algèbre réelle est $\frac{n(n-1)}{2}$.

2. $u(n)$: espace vectoriel réel des matrices $n \times n$ antihermitiennes,

$$u \in u(n) \Leftrightarrow u^\dagger = -u.$$

   On vérifie à nouveau facilement que c'est une algèbre de Lie. Sa dimension (réelle) est $n(n-1)$ (composantes non-diagonales) $+n$ (composantes diagonales), soit n^2.

3. $su(n)$: espace vectoriel réel des matrices $n \times n$ antihermitiennes et de trace nulle,

$$u \in su(n) \Leftrightarrow u^\dagger = -u, \quad Tr\, u = 0.$$

   C'est une sous-algèbre de $u(n)$ car la trace d'un commutateur est toujours zéro. La condition de trace apporte une condition supplémentaire (car la trace d'une matrice antihermitienne est nécessairement imaginaire pure) ; la dimension de $su(n)$ est $n^2 - 1$.

$so(3)$ et $su(2)$ sont isomorphes

Les algèbres de Lie $so(3)$ et $su(2)$ sont toutes deux de dimension 3. Une base de $so(3)$ est donnée par les matrices

$$O_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad O_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.48)$$

Les relations de commutation sont

$$[O_i, O_j] = \varepsilon_{ijk} O_k \quad (1.49)$$

et les constantes de structure sont donc ε_{ijk}. Une base de $su(2)$ est donnée par les matrices

$$t_k = -i\frac{\sigma_k}{2}$$

dont les commutateurs sont

$$[t_i, t_j] = \varepsilon_{ijk} t_k :$$

$su(2)$ possède les mêmes constantes de structure.

1.2.2 Somme directe d'algèbres de Lie

Somme directe d'espaces vectoriels (rappels)

Soient n espaces vectoriels $X_1, X_2, \cdots, X_n$. La somme directe $X_1 \oplus X_2 \oplus \cdots \oplus X_n$ est l'espace vectoriel des n-uples $(x_1, \cdots, x_n)$ avec $x_i \in X_i$, muni de l'addition

$$(x_1, x_2, \cdots, x_n) + (x'_1, x'_2, \cdots, x'_n) = (x_1 + x'_1, x_2 + x'_2, \cdots, x_n + x'_n) \quad (1.50)$$

et de la multiplication scalaire

$$\lambda(x_1, x_2, \cdots, x_n) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \cdots, \lambda x_n). \tag{1.51}$$

L'ensemble des n-uples tels que $x_i = 0$ sauf pour $i = k$ est un sous-espace vectoriel isomorphe à X_k, $X_k \sim \{(0, 0, \cdots, 0, x_k, 0, \cdots, 0)\}$ et il est commode de faire l'identification. Les X_k forment ainsi une famille de sous-vectoriels de $X = X_1 \oplus X_2 \oplus \cdots \oplus X_n$ jouissant des propriétés suivantes :

- $X_k \cap X_j = \{0\}$ pour $k \neq j$;
- tout élément $x \in X$ se décompose de manière unique comme somme d'éléments $x_k \in X_k$,

$$x = x_1 + x_2 + \cdots + x_n, \quad x_i \in X_i.$$

Somme directe d'algèbres de Lie

Afin de garder des formules simples, considérons le cas de la somme directe de deux algèbres de Lie. Le cas de n algèbres de Lie est une généralisation immédiate. Soient donc $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ deux algèbres de Lie. Leur somme directe (en tant qu'algèbres de Lie) est l'espace vectoriel $\mathcal{B}_1 \oplus \mathcal{B}_2$ muni du crochet

$$[(x_1, x_2), (y_1, y_2)] = ([x_1, y_1], [x_2, y_2]), \quad x_i, y_i \in \mathcal{B}_i.$$

Si on identifie naturellement $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ à des sous-algèbres de $\mathcal{B}_1 \oplus \mathcal{B}_2$, alors $[\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2] = 0$.

1.2.3 $su(2)$, $so(3)$, $SU(2)$ et $SO(3)$

Il existe un lien très étroit entre $su(n)$ et $SU(n)$, ainsi qu'entre $so(n)$ et $SO(n)$.

Espace vectoriel tangent à l'identité

Soit $U(t)$ une courbe différentiable dans le groupe $U(n)$ qui passe par l'identité en $t = 0$. La matrice

$$u = \frac{d}{dt} U(t)|_{t=0}$$

appartient à *l'espace vectoriel tangent à l'identité* de $U(n)$. En différentiant la condition $U^\dagger(t)U(t) = I$ par rapport à t et en prenant ensuite $t = 0$, on obtient

$$u^\dagger + u = 0.$$

La matrice u est un élément de $u(n)$. Si en outre, $\det U(t) = 1$ ($U(t) \in SU(n)$ $\forall t$), alors on obtient aussi

$$Tr\, u = 0$$

par différentiation,

$$0 = \frac{d}{dt}(\det U(t))|_{t=0} = Tr\, u :$$

$u \in su(n)$.

Toute matrice antihermitienne (de trace nulle) peut être obtenue de cette façon. En effet, si $u^\dagger$ est antihermitienne (de trace nulle), la courbe

$$\exp(tu)$$

est dans le groupe $U(n)$ ($SU(n)$) et passe par l'identité en $t = 0$. Son vecteur tangent à l'identité est la matrice u donnée.

Une propriété analogue existe pour $SO(n)$: soit $R(t)$ une courbe différentiable dans le groupe $SO(n)$ qui passe par l'identité en $t = 0$. La matrice

$$\omega = \frac{d}{dt} R(t)|_{t=0}$$

de l'espace vectoriel tangent à l'identité de $SO(n)$ est antisymétrique (différentier $R^t(t)R(t) = I$ par rapport à t et faire $t = 0$) et appartient donc à $so(n)$. En fait, si ω est une matrice antisymétrique quelconque, la courbe

$$\exp(t\omega)$$

appartient à $SO(n)$, passe par l'identité pour $t = 0$ et y a pour vecteur tangent la matrice ω donnée.

Groupes et algèbres de Lie

La discussion qui précède indique :
- que l'espace vectoriel tangent à l'identité des groupes $U(n)$, $SU(n)$, $SO(n)$ est une algèbre de Lie, à savoir, $u(n)$, $su(n)$ et $so(n)$;
- que l'exponentielle d'un élément d'une de ces algèbres de Lie donne un élément du groupe correspondant.

Ces propriétés sont en fait très générales et valables pour tout *groupe de Lie* : on passe du groupe à l'algèbre par différentiation au voisinage de l'identité ; on remonte au groupe par exponentiation. Nous ne formaliserons pas ici la notion de groupe de Lie, nous bornant simplement à indiquer que les groupes $U(n)$, $SU(n)$, $SO(n)$ sont des exemples particuliers de groupes de Lie (dans ces cas particuliers, compacts). Dans la suite, quand nous utiliserons la terminologie "groupe de Lie", nous aurons en tête un de ces groupes explicites ou un de leurs produits directs [5].

On a vu que dans les cas de $U(2)$ et $SU(2)$, l'application exp de $u(2)$ vers $U(2)$ (ou de $su(2)$ vers $SU(2)$) est surjective, c'-à-d. couvre tous le groupe. Mais elle n'est pas injective puisque par exemple $\exp(2\pi i\sigma_3) = I$.

C'est aussi vrai pour $U(n)$ et $SU(n)$ puisque toute matrice unitaire est diagonalisable, en toute dimension (finie). C'est également vrai pour $so(3)$ et $SO(3)$. L'application

$$\exp : so(3) \to SO(3), \quad \omega \in so(3) \mapsto \exp\omega \in SO(3)$$

5. L'utilisation de la terminologie "groupe de Lie" est justifiée par le fait que les résultats démontrés dans le cas des groupes $U(n)$, $SU(n)$, $SO(n)$ ont en fait une portée plus générale.

est aussi surjective (mais pas injective) car [6]

$$R(\vec{n}, \varphi) = \exp\left((\vec{n} \cdot \vec{O})\varphi\right).$$

On appelle souvent en physique *transformations infinitésimales* les vecteurs tangents à l'identité d'un groupe de Lie. Ceci tient au fait que les transformations voisines de l'identité ("transformations infinitésimales") s'écrivent

$$A = I + \epsilon X + O(\epsilon^2)$$

où X est dans l'algèbre de Lie.

Si G_1 est un groupe d'opérateurs linéaires agissant dans l'espace X_1 et G_2 est un groupe d'opérateurs linéaires agissant dans l'espace X_2, le groupe $G_1 \times G_2$ est naturellement un groupe d'opérateurs linéaires agissant dans l'espace $X = X_1 \oplus X_2$, dont les matrices prennent la forme diagonale par blocs

$$\begin{pmatrix} g_1 & 0 \\ 0 & g_2 \end{pmatrix}$$

dans toute base adaptée à la décomposition de X. On vérifie aisément que si G_1 et G_2 sont deux groupes de Lie d'algèbres de Lie respectives $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$, alors $G_1 \times G_2$ a pour algèbre de Lie $\mathcal{B}_1 \oplus \mathcal{B}_2$. Ainsi, l'algèbre de Lie de $SU(3) \times SU(2) \times u(1)$ est $su(3) \oplus su(2) \oplus u(1)$.

Deux algèbres de Lie isomorphes ne donnent pas nécessairement des groupes de Lie isomorphes par exponentiation

Nous avons vu un exemple explicite : $su(2)$ et $so(3)$ sont isomorphes, mais $SU(2)$ et $SO(3)$ ne le sont pas. On obtient $SO(3)$ en prenant le quotient du groupe simplement connexe $SU(2)$ par son centre (discret) $\mathbb{Z}_2$. Cette possibilité de non-isomorphisme de groupes ayant même algèbre de Lie se présente car la fonction exp n'est pas injective et son noyau peut dépendre de la représentation.

1.3 Représentations - Généralités

1.3.1 Définitions

Représentations des groupes

Soit G un groupe et X un espace vectoriel $\neq \{\vec{0}\}$. On appelle *représentation* du groupe G dans l'espace X toute application T qui fait correspondre à chaque élément $g \in G$ un opérateur linéaire $T(g)$ de l'espace X, telle que

6. Information : le fait que tout élément du groupe peut s'écrire comme l'exponentielle d'un élément de l'algèbre est vrai pour tout groupe de Lie compact. Dans le cas général, il faut considérer des produits d'exponentielles d'éléments de l'algèbre pour couvrir tout le groupe. Un groupe matriciel peut être vu comme un sous ensemble de $\mathbb{R}^k$ ($k = n^2$ si les matrices $n \times n$ sont réelles et $2n^2$ si elles sont complexes). Il est "compact" s'il est compact au sens topologique habituel (fermé, borné).

– $T(e) = I$ (où e est le neutre de G et I l'opérateur identité de X ;
– $T(g_1 g_2) = T(g_1)T(g_2) \;\; \forall g_1, g_2 \in G$.

L'espace X est appelé *l'espace de la représentation* T, la dimension de X est *la dimension de la représentation* et les opérateurs $T(g)$ sont *les opérateurs de la représentation*.

Des deux conditions ci-dessus, on tire $T(g^{-1})T(g) = T(g^{-1}g) = T(e) = I$ et $T(g)T(g^{-1}) = T(gg^{-1}) = T(e) = I$: les opérateurs $T(g)$ sont bijectifs et $(T(g))^{-1} = T(g^{-1})$. On peut donc remplacer la première condition de la définition par la condition que les opérateurs sont des bijections de X sur X. Une représentation de G est un homomorphisme de G dans le groupe $GL(X)$ des opérateurs linéaires bijectifs de X.

On dit qu'une représentation est *fidèle* si l'homomorphisme $T : G \to GL(X)$ est injectif, de telle sorte que G est isomorphe à ImT ($KerT = \{e\}$). On appelle *représention triviale* de G dans X la représentation qui associe à tout $g \in G$ l'opérateur identité I de X, $T(g) = I \; \forall g \in G$. Dans ce cas, $KerT = G$. Les représentations d'un groupe simple dans un espace X sont toutes fidèles, à l'exception de la représentation triviale.

Si G est lui-même un groupe d'opérateurs linéaires, alors l'application identique T de G sur lui-même est une représentation, $T(g) = g$. On l'appelle la représentation identique. Elle est évidemment fidèle. Par exemple, pour $SU(2)$, l'application identique $U \to U$ définit une représentation de dimension 2. L'homomorphisme $f : SU(2) \to SO(3)$ définit une représentation de dimension 3, mais celle-ci n'est pas fidèle. En fait, toute représentation T de $SO(3)$ définit par composition avec l'homomorphisme $f : SU(2) \to SO(3)$ étudié ci-dessus une représentation $\breve{T}$ de $SU(2)$ telle que $\breve{T}(-I) = I$ et inversément, toute représentation $\breve{T}$ de $SU(2)$ telle que $\breve{T}(-I) = I$ définit une représentation de $SO(3)$.

On peut considérer des espaces vectoriels réels ou complexes. Comme ce sont les espaces vectoriels complexes qui sont d'un intérêt direct en mécanique quantique, on ne considérera, sauf mention contraire, que des représentations dans des espaces vectoriels complexes. On se placera aussi généralement en dimension finie et on identifiera souvent opérateurs et matrices. Une propriété importante qui jouera un rôle capital est la suivante : toute matrice $n \times n$ possède au moins un vecteur propre (sur les complexes). Enfin, pour les groupes de Lie, on supposera que les éléments de matrice des matrices de la représentation sont des fonctions différentiables des éléments du groupe.

Soit H un sous-groupe de G. Toute représentation T de G dans l'espace vectoriel X définit une représentation de H dans X, par restriction aux éléments de H.

Représentations des algèbres de Lie

Soit A une algèbre de Lie. Une représentation de A dans l'espace vectoriel X est une application linéaire s de A dans $gl(X)$ (opérateurs linéaires de X)

qui préserve la structure de crochet. Explicitement :

$$\begin{aligned} s \quad : \quad & A \to gl(X) \\ & s(a_1x_1 + a_2x_2) = a_1s(x_1) + a_2s(x_2) \ \ \forall x_1, x_2 \in A, \forall a_1, a_2 \in \mathbb{R} \\ & s([x,y]) = [s(x), s(y)] \end{aligned}$$

où on a supposé l'algèbre A réelle. Le crochet dans le membre de droite de la deuxième équation est le commutateur des opérateurs linéaires.

On utilise la même terminologie que pour les représentations des groupes (dimension de la représentation, représentation fidèle etc). Une représentation d'une algèbre est automatiquement une représentation de n'importe laquelle de ses sous-algèbres.

Représentations équivalentes

Soient T_1 une représentation du groupe G dans l'espace vectoriel X_1 et T_2 une représentation de G dans X_2. On dit que T_1 et T_2 sont *équivalentes* (ce que l'on note $T_1 \sim T_2$) s'il existe un opérateur linéaire A qui applique bijectivement X_1 sur X_2 et qui satisfait à la condition *d'entrelacement*

$$AT_1(g) = T_2(g)A \quad \forall g \in G. \tag{1.52}$$

Puisque A est inversible, on peut également écrire

$$T_1(g) = A^{-1}T_2(g)A \ \forall g \in G. \tag{1.53}$$

Si deux représentations T_1 et T_2 sont inéquivalentes, on écrit $T_1 \nsim T_2$.

Si X_1 est de dimension finie n_1, alors $dim X_2 = n_1$, on peut dentifier X_1 et X_2 et on voit par (1.53) que les matrices de la représentation T_1 diffèrent de celles de la représentation T_2 simplement par un changement de base.

Même définition pour l'équivalence des représentations des algèbres de Lie.

Dans la suite, on ne distinguera pas deux représentations équivalentes, c-à-d., on travaillera toujours "à une équivalence près".

Représentation duale, représentation hermitienne conjuguée, représentation complexe conjuguée

Soit T une représentation du groupe G. On appelle *représentation duale* (ou *contragrédiente*) $\tilde{T}$ la représentation définie par

$$\tilde{T} : g \in G \mapsto (T(g)^t)^{-1}. \tag{1.54}$$

C'est bien une représentation car $\tilde{T}(g_1g_2) = (T(g_1g_2)^t)^{-1} = ((T(g_1)T(g_2))^t)^{-1} = (T(g_2)^tT(g_1)^t)^{-1} = (T(g_1)^t)^{-1}(T(g_2)^t)^{-1} = \tilde{T}(g_1)\tilde{T}(g_2)$.

On définit la *représentation hermitienne conjuguée* $\hat{T}$ par

$$\hat{T} : g \in G \mapsto (T(g)^\dagger)^{-1}. \tag{1.55}$$

Enfin, on définit la *représentation complexe conjuguée* $\bar{T}$ par

$$\bar{T} : g \in G \mapsto (T(g))^*. \tag{1.56}$$

Les définitions correspondantes pour les algèbres de Lie sont (s est une représentation de l'algèbre de Lie A)

$$\tilde{s} : x \in A \mapsto -s(x)^t \tag{1.57}$$

$$\hat{s} : x \in A \mapsto -s(x)^\dagger \tag{1.58}$$

$$\bar{s} : x \in A \mapsto s(x)^* \tag{1.59}$$

Représentations unitaires

La représentation T du groupe G est *unitaire* si tous les opérateurs $T(g)$ sont unitaires,

$$T(g)\,T(g)^\dagger = I = T(g)^\dagger\,T(g) \quad \forall g \in G. \tag{1.60}$$

La condition correspondante pour les algèbres de Lie est que les opérateurs $s(x)$ sont anti-hermitiens, $s(x)^\dagger = -s(x)\ \forall x \in A$.

Si la représentation T est unitaire, elle coïncide avec son hermitienne conjuguée et les représentations duale et complexe conjuguée coïncident aussi.

Caractères

Soit T une représentation du groupe G. On appelle *caractère* χ_T de la représentation T la fonction (en général complexe) sur le groupe G définie par

$$\chi_T : G \to \mathbb{C} : g \mapsto \chi_T(g) = Tr(T(g)). \tag{1.61}$$

On voit facilement que :

1. si T et T' sont équivalentes, alors $\chi_T = \chi_{T'}$;
2. si g et g' sont conjugués ($\Leftrightarrow \exists h \in G : g' = hgh^{-1}$), alors $\chi_T(g) = \chi_T(g')$;
3. si la représentation T est unitaire, alors $\chi_T(g^{-1}) = (\chi_T(g))^*$;
4. $\chi_T(e) = n$ (dimension de la représentation).

1.3.2 Sous-espaces invariants, représentations irréductibles

Définitions

On dit qu'un sous-espace $M \subset X$ est *invariant* par la représentation T s'il est invariant relativement à tous les opérateurs $T(g)$, $T(g)M \subset M\ \forall g \in G$. La restriction des opérateurs $T(g)$ à M définit une représentation de G que l'on note $T|_M$.

Les sous-espaces triviaux $\{0\}$ et X sont évidemment invariants. Une représentation est *irréductible* ssi elle ne possède pas de sous-espace invariant non trivial. Une représentation qui n'est pas irréductible est appelée *réductible*.

Toute représentation de dimension 1 est clairement irréductible. La représentation triviale est toujours réductible, sauf en dimension 1.

Lemme de Schur

Enoncé : Soient T et S deux représentations irréductibles du groupe G dans les espaces respectifs X et Y. Soit A un opérateur linéaire de X dans Y qui satisfait à la condition d'entrelacement

$$AT(g) = S(g)A \quad \forall g \in G. \tag{1.62}$$

Alors, seuls deux cas sont possibles :
- ou bien $A = 0$;
- ou bien A applique bijectivement X sur Y et $T \sim S$.

En d'autres termes, il ne peut y avoir de cas intermédiaire où A ne serait pas inversible sans être nul.

Démonstration : Posons $L = ImA = AX = \{y \in Y | \exists x \in X : Ax = y\}$. Alors L est un sous-espace invariant de Y car si $y \in Y$, i.e., $y = Ax$ pour un certain $x \in X$, alors $Sy = SAx = ATx \in L$. Puisque S est irréductible, deux cas sont possibles : ou bien $L = \{0\}$ ou bien $L = Y$. Dans le premier cas, tout X est appliqué sur 0 et donc, $A = 0$. Dans le second cas, A est surjectif. Montrons que A est aussi injectif. Soit $M = KerA = \{x \in X | Ax = 0\}$. A nouveau, M est un sous-espace invariant de X car si $x \in M$, alors $Tx \in M$ parce que $ATx = SAx = S0 = 0$. Donc, ou bien $M = \{0\}$, ou bien $M = X$. Le deuxième cas est impossible car on a supposé $L \neq \{0\}$. Reste $M = \{0\}$, i.e., A est aussi injectif.

Conséquence fondamentale

Théorème : soit T une représentation irréductible de dimension finie du groupe G dans l'espace X. Alors, tout opérateur linéaire $A : X \to X$ qui commute avec tous les opérateurs $T(g)$ de la représentation est multiple de l'identité :

$$AT(g) = T(g)A \quad \forall g \in G \quad \Rightarrow \quad A = \lambda I \ \ (\lambda \in \mathbb{C}) \tag{1.63}$$

Démonstration : Puisque A est linéaire, il possède au moins une valeur propre, appelons-la λ. Soit $B = A - \lambda I$. On a aussi $BT(g) = T(g)B \ \ \forall g \in G$. D'après le lemme de Schur, deux cas sont possibles : ou bien $B = 0$; ou bien B est inversible. Mais B ne peut être inversible car B possède 0 comme valeur propre ($Bx = 0$ si $Ax = \lambda x$). Donc, $B = 0$, ce qui implique $A = \lambda I$. cqfd.

Remarques :

1. Autre démonstration : soit L = sous-espace des vecteurs propres de A pour la valeur propre λ, $L = \{x \in X : Ax = \lambda x\}$. Le sous-espace L est au moins de dimension 1 et est invariant car si $x \in L$, alors $T(g)x \in L$: $AT(g)x = T(g)Ax = \lambda T(g)x$. Il en résulte $L = X$.

2. Le lemme et sa conséquence fondamentale sont aussi vrais pour les représentations des algèbres de Lie.

Représentations irréductibles de $U(1)$

Théorème : toute représentation irréductible de dimension finie d'un groupe abélien est de dimension 1.

Démonstration : soit T une représentation irréductible d'un groupe abélien G dans un espace de dimension finie X. On a $g_1 g_2 = g_2 g_1 \ \ \forall g_1, g_2 \in G$ et par conséquent $T(g_1)T(g_2) = T(g_2)T(g_1)$. La matrice $T(g_1)$ commute avec toutes les matrices de la représentation et est donc multiple de l'identité puisque la représentation est irréductible, $T(g_1) = \lambda(g_1)I$. De même, $T(g_i) = \lambda(g_i)I \ \ \forall g_i \in G$. Il en découle que tous les sous-espaces de X sont invariants pour tous les opérateurs du groupe et donc, la dimension de X est nécessairement 1 (car T est irréductible).

Une représentation irréductible d'un groupe abélien est donc complètement caractérisée par une fonction numérique $\lambda(g)$, $g \in G$, obéissant à la condition $\lambda(g_1)\lambda(g_2) = \lambda(g_1 g_2)$ avec $\lambda(e) = 1$.

Cas de $U(1)$: Le groupe $U(1)$ est le groupe $\{e^{i\varphi}\}$ des nombres complexes de module 1, $\varphi \in [0, 2\pi]$ et est isomorphe à $SO(2)$. On peut donc paramétriser un élément du groupe par l'angle φ. Soit T une représentation unitaire irréductible. Elle est de dimension 1. Pour trouver la fonction $\lambda(\varphi)$ caractérisant T, on dérive l'équation $\lambda(\varphi)\lambda(\psi) = \lambda(\varphi + \psi)$ par rapport à ψ, et on fait ensuite $\psi = 0$. On obtient $\lambda' = k\lambda$ avec $k = (d\lambda/d\psi)|_{\psi=0}$. Posant $k = im$, ceci implique $\lambda = e^{im\varphi}$ avec à ce stade $m \in \mathbb{R}$ car T est unitaire. Imposant que la fonction λ soit bien définie sur le groupe, on obtient (avec le choix $\varphi \in [0, 2\pi]$) que m doit être un entier, $m \in \mathbb{Z}$. Les représentations irréductibles de $U(1)$ sont donc caractérisées par un entier m. On les note T_m :

$$T_m(m \in \mathbb{Z}) \quad : \quad U(1) = \{e^{i\varphi} | \varphi \in [0, 2\pi]\} \to \mathbb{C}^1, \tag{1.64}$$

$$e^{i\varphi} \in U(1) \mapsto T_m(e^{i\varphi}) = e^{im\varphi} I_{1\times 1}. \tag{1.65}$$

A noter que ces représentations sont inéquivalentes deux à deux puisqu'elles ont des caractères distincts. A noter aussi que $\bar{T}_m = T_{-m}$.

1.3.3 Représentations complètement réductibles

Somme directe de représentations

Supposons que soit définie dans chacun des espaces vectoriels X_k une représentation T_k du groupe G. On définit dans la somme directe des X_i une représentation appelée *somme directe des représentations* T_k par la formule

$$T(g)(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) = T_1(g)x_1 + T_2(g)x_2 + \cdots + T_n(g)x_n. \tag{1.66}$$

Il est évident que $T(e) = I$ et $T(g_1 g_2) = T(g_1)T(g_2)$. T est bien une représentation, que l'on note $T = T_1 \oplus T_2 \oplus \cdots \oplus T_n$. Chaque espace X_k est invariant par T, $T(g)x \in X_k$ si $x \in X_k$ et de plus, la restriction de T à X_k est précisément T_k.

Dans une base adaptée à la décomposition de X en la somme directe des X_k, les opérateurs $T(g)$ sont diagonaux par blocs,

$$T(g) = \begin{pmatrix} T_1(g) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & T_2(g) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & T_n(g) \end{pmatrix}.$$

Le caractère $\chi_{T_1 \oplus T_2 \oplus \cdots \oplus T_n}$ de la somme directe des représentations T_i est la somme de leurs caractères,

$$\chi_{T_1 \oplus T_2 \oplus \cdots \oplus T_n}(g) = \chi_{T_1}(g) + \chi_{T_2}(g) + \cdots + \chi_{T_n}(g) \tag{1.67}$$

On dit que la représentation T dans l'espace X est *complètement réductible* si T est la somme directe de représentations irréductibles. On écrit alors, comme ci-dessus,

$$T = T_1 \oplus T_2 \oplus \cdots \oplus T_n \tag{1.68}$$

où les T_i sont les représentations irréductibles contenues dans T. Si la même représentation apparaît plusieurs fois (à une équivalence près) dans la décomposition de T, on écrit aussi

$$T = m_1 T_1 \oplus m_2 T_2 \oplus \cdots \oplus m_p T_p \tag{1.69}$$

où m_i est la *multiplicité* de T_i dans T, c-à-d. le nombre de fois que T_i apparaît. Si T se réduit à $m_1 T_1$, on dit que T est *multiple de la représentation T_1 avec multiplicité m_1*.

A noter que toute représentation irréductible est complètement réductible (les multiplicités m_i sont nulles sauf une, qui est égale à 1).

Représentations unitaires

Il existe des représentations réductibles (c-à-d. non irréductibles) qui ne sont pas complètement réductibles (voir annexe A). Cependant, ce phénomène ne se présente pas pour les représentations unitaires.

Théorème : Toute représentation unitaire T est complètement réductible.

Démonstration : On note le produit scalaire hermitien dans l'espace X de la représentation par (x, y). Dans une base orthonormée, $(x, y) = \sum_{i=1}^{dim X} (x^i)^* y^i$. Si la représentation T donnée est irréductible, il n'y a rien à démontrer. Supposons qu'elle est réductible. Soit M un sous-espace invariant non trivial de X et $M^\perp$ le sous-espace orthogonal,

$$M^\perp = \{x \in X | (x, y) = 0 \ \ \forall y \in M\}.$$

On a

$$X = M \oplus M^\perp$$

car $M \cap M^\perp = \{0\}$ (si $x \in M$ and $x \in M^\perp$, alors $(x, x) = 0$ et $x = 0$) et d'autre part, tout vecteur $x \in X$ se décompose comme somme $x = y + z$ d'un vecteur y

de M ($y = \sum(e_k, x)e_k$ où $\{e_k\}$ est une base orthonormée de M) et d'un vecteur $z = x - y$ orthogonal à M, $(e_j, z) = 0$. Le point crucial de la démonstration du théorème est que le complémentaire orthogonal $M^\perp$ de M est aussi invariant : si $x \in M^\perp$, alors $T(g)x \in M^\perp$ car $\forall y \in M$, on a

$$\begin{aligned}
(T(g)x, y) &= \big(T(g^{-1})T(g)x, T(g^{-1})y\big) \qquad \text{(car } T(g^{-1}) \text{ est unitaire)} \\
&= \big(x, T(g^{-1})y\big) \qquad \text{(car } T(g^{-1}) = (T(g))^{-1}\text{)} \\
&= 0 \qquad \text{(car } T(g^{-1})y \in M \text{ puisque } M \text{ est invariant et } x \in M^\perp\text{).}
\end{aligned}$$

Donc, la représentation unitaire T est la somme directe des représentations $T|_M$ et $T|_{M^\perp}$, qui sont toutes les deux unitaires. En répétant l'argument, on arrive au résultat annoncé.

Les cas de $SU(2)$ et $SO(3)$

On peut montrer que pour $SU(2)$ et $SO(3)$ (en fait pour tous les groupes compacts et donc aussi pour $SU(n)$, $SO(n)$ etc), toute représentation de dimension finie est équivalente à une représentation unitaire et est donc complètement réductible. Pour connaître la représentation la plus générale de $SU(2)$ ou $SO(3)$, il suffit donc de connaître toutes les représentations irréductibles, qui sont les blocs élémentaires avec lesquels on construit par somme directe la représentation la plus générale.

Un résultat pour les représentations complètement réductibles

Pour les représentations complètement réductibles, on a le résultat utile suivant : *une représentation T complètement réductible est irréductible ssi les seuls opérateurs qui commutent avec tous les opérateurs de la représentation sont multiples de l'identité.*

On sait la condition nécessaire ("T irréductible" $\Rightarrow$ "les seuls opérateurs qui commutent avec tous les opérateurs de la représentation sont multiples de l'identité" ("A $\Rightarrow$ B")). Elle est aussi suffisante. Pour le montrer, montrons que "non A implique non B". Si T n'est pas irréductible (mais dans la classe des représentations complètement réductibles), alors les matrices des opérateurs de la représentation sont diagonales par blocs dans une base bien choisie,

$$T(g) = \begin{pmatrix} T_1(g) & 0 \\ 0 & T_2(g) \end{pmatrix}.$$

La matrice

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 I_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 I_2 \end{pmatrix}$$

commute avec $T(g)$ $\forall g \in G$ et $\forall \lambda_i$. Elle n'est pas multiple de l'identité si $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

1.3.4 Lien entre représentations des groupes et des algèbres de Lie

On a vu précédemment qu'il y avait un lien très étroit entre groupes et algèbres de Lie. C'est aussi vrai pour leurs représentations.

Théorème : Soient G un groupe de Lie et $\mathcal{G}$ son algèbre de Lie. Soit S une représentation du groupe G dans l'espace vectoriel X. Alors, l'application

$$s : h \in \mathcal{G} \mapsto \frac{d}{dt} S(\exp ht)|_{t=0} \tag{1.70}$$

est une représentation de l'algèbre de Lie $\mathcal{G}$ dans le même espace vectoriel X.

Démonstration : Pour démontrer ce théorème, nous aurons besoin de deux lemmes.

Lemme 1 : On a $S(\exp ht) = \exp(s(h)t)$. En effet, posant $M(t) = S(\exp ht)$ et $N(t) = \exp(s(h)t)$, on obtient

$$\frac{dN}{dt} = (\exp(s(h)t))\, s(h) = Ns(h)$$

et

$$\frac{dM}{dt} = Ms(h)$$

(car $M(t+t') = M(t)M(t')$, S est une représentation). De plus, $N(0) = M(0) = 0$, donc $N(t) = M(t)\ \forall t$, cqfd.

Lemme 2 : Soient A et B deux matrices $n \times n$. Alors

$$\exp[A,B]t = \left(\exp A\sqrt{t}\right)\left(\exp B\sqrt{t}\right)\left(\exp -A\sqrt{t}\right)\left(\exp -B\sqrt{t}\right)(I + o(t))$$

où $o(t)$ est un terme qui tend vers 0 plus vite que t quand t tend vers 0 et dont la dérivée en $t = 0$ est nulle. Pour voir cela, on développe simplement les exponentielles.

Revenons à la démonstration du théorème.

– s est une application linéaire. En effet

$$\begin{aligned}
s(a_1h_1+a_2h_2) &= \frac{d}{dt}\left[S\left(\exp(a_1h_1+a_2h_2)t\right)\right]|_{t=0} \quad \text{(par définition)}\\
&= \frac{d}{dt}\left[S\left(\exp(a_1h_1t)\exp(a_2h_2t)(I+O(t^2))\right)\right]|_{t=0}\\
&\qquad \text{(par développement de l'exponentielle)}\\
&= \frac{d}{dt}\left[S\left(\exp(a_1h_1t)\right)S\left(\exp(a_2h_2t)\right)S(I+O(t^2))\right]|_{t=0}\\
&\qquad \text{(S est une représentation)}\\
&= \frac{d}{dt}\left[S\left(\exp\left(a_1h_1t\right)\right)\right]|_{t=0}+\frac{d}{dt}\left[S\left(\exp\left(a_2h_2t\right)\right)\right]|_{t=0}\\
&\qquad \text{(règle de Leibnitz et $S(I)=I$)}\\
&= \frac{d}{dt}\left[\exp\left(s(h_1)(a_1t)\right)\right]|_{t=0}+\frac{d}{dt}\left[\exp\left(s(h_2)(a_2t)\right)\right]|_{t=0}\\
&\qquad \text{(par le premier lemme)}\\
&= a_1s(h_1)+a_2s(h_2).
\end{aligned}$$

– s préserve le commutateur. En effet,

$$\begin{aligned}
s([h_1,h_2]) &= \frac{d}{dt}\left[S\left(\exp[h_1,h_2]t\right)\right]|_{t=0}\\
&= \frac{d}{dt}\left[S\left(\exp(h_1\sqrt{t})\exp(h_2\sqrt{t})\exp(-h_1\sqrt{t})\exp(-h_2\sqrt{t})(I+o(t))\right)\right]|_{t=0}\\
&\qquad \text{(par le lemme 2)}\\
&= \frac{d}{dt}\left[S\left(\exp(h_1\sqrt{t})\right)S\left(\exp(h_2\sqrt{t})\right)S\left(\exp(-h_1\sqrt{t})\right)S\left(\exp(-h_2\sqrt{t})\right)\right]|_{t=0}\\
&= \frac{d}{dt}\left[\exp\left(s(h_1)\sqrt{t}\right)\exp\left(s(h_2)\sqrt{t}\right)\exp\left(-s(h_1)\sqrt{t}\right)\exp\left(-s(h_2)\sqrt{t}\right)\right]|_{t=0}\\
&= \frac{d}{dt}\left[\exp\left([s(h_1),s(h_2)]t\right)\left(I+o(t)\right)\right]|_{t=0}\\
&= [s(h_1),s(h_2)].
\end{aligned}$$

Donc s définit bien une représentation de $\mathcal{G}$.

Inversément, soit s une représentation de l'algèbre de Lie $\mathcal{G}$ d'un groupe de Lie G. On peut montrer qu' on obtient par exponentiation une représentation du groupe de Lie simplement connexe $\tilde{G}$ ayant même algèbre de Lie $\mathcal{G}$ et dont G est un quotient par un sous-groupe du centre, $G=\tilde{G}/K$ où K est un sous-groupe de $Z_{\tilde{G}}$ (K peut se réduire à l'identité). C'est un résultat très général, qui dépasse le cadre du cours, mais que nous vérifierons explicitement dans le cas de $su_2 \simeq so(3)$, $SU(2)$ et $SO(3)=SU(2)/\mathbb{Z}_2$. [Voir aussi exercices pour le cas de $U(1)=\mathbb{R}/\mathbb{Z}$.]

On notera enfin que si deux représentations S et S' de G (connexe) définissent des représentations équivalentes de $\mathcal{G}$, alors elles sont équivalentes : si $s(h)=Ms'(h)M^{-1}\ \ \forall h\in\mathcal{G}$, alors $S(g)=MS'(g)M^{-1}\ \ \forall g\in G$. En effet,

$S(g) = S(\exp h) = \exp(s(h)) = \exp(Ms'(h)M^{-1}) = M\exp(s'(h))M^{-1}$
$= MS'(\exp h)M^{-1} = MS'(g)M^{-1}$.

1.3.5 Représentation adjointe

La représentation adjointe Ad d'un groupe de Lie G est définie comme suit. L'espace de la représentation est l'algèbre de Lie $\mathcal{G}$ de G. Si $g \in G$, l'opérateur Ad_g associé est

$$Ad_g : x \in \mathcal{G} \mapsto Ad_g(x) \equiv gxg^{-1} = \frac{d}{dt}\left(g\exp(xt)g^{-1}\right)|_{t=0}. \tag{1.71}$$

Cette définition a un sens car $g\exp(xt)g^{-1}$ est une courbe dans G qui passe par l'identité en $t = 0$ et donc, $gxg^{-1} \in \mathcal{G}$. On vérifie aisément que Ad est une représentation, $Ad_{g_1 g_2} = Ad_{g_1} Ad_{g_2}$ et $Ad_e = I$. Le noyau est Z_G.

La représentation adjointe de $SU(2)$ n'est autre que $SO(3)$ et n'est pas fidèle. La représentation adjointe de $SO(3)$ est $SO(3)$ et est fidèle (exercices).

La représentation adjointe Ad du groupe G induit une représentation ad de son algèbre de Lie $\mathcal{G}$, que l'on appelle aussi représentation adjointe. Pour $y \in \mathcal{G}$, l'opérateur ad_y est donné par

$$\begin{aligned} ad_y : x \in \mathcal{G} \mapsto ad_y(x) &= \frac{d}{dt}\left(Ad_{\exp yt}(x)\right)|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt}\left((\exp yt)x(\exp -yt)\right)|_{t=0} \\ &= [y, x]. \end{aligned} \tag{1.72}$$

C'est une représentation d'après le théorème général vu à la section précédente. On peut d'ailleurs vérifier directement $[ad_y, ad_z] = ad_{[y,z]}$ et montrer aussi que les éléments de matrice des générateurs ad_{T_i} de la représentation adjointe ad sont les constantes de structure de l'algèbre de Lie.

1.3.6 Produit tensoriel de représentations

Définition

Considérons comme en mécanique quantique deux systèmes décrits respectivement par les états $\{|i\rangle\}$ et $\{|\alpha\rangle\}$ ($i = 1, \cdots m$, $\alpha = 1, \cdots, n$). Le système composé est décrit par les états $\{|i\rangle|\alpha\rangle\}$. Ces états forment la base de l'espace vectoriel *produit tensoriel* des espaces vectoriels E_1 et E_2 décrivant les systèmes 1 et 2. En mathématique, on utilise la notation $e_i \otimes f_\alpha$ pour $|i\rangle|\alpha\rangle$ (avec $e_i \equiv |i\rangle$ et $f_\alpha \equiv |\alpha\rangle$) et on note le produit tensoriel $E_1 \otimes E_2$. C'est un espace vectoriel de dimension mn. On a, pour $y_1 = \sum_i a_i e_i \in E_1$ et $y_2 = \sum_\alpha b_\alpha f_\alpha \in E_2$,

$$y_1 \otimes y_2 = \sum_{i,\alpha} a_i\, b_\alpha\, e_i \otimes f_\alpha.$$

Si X_1 est un opérateur linéaire agissant dans E_1 et X_2 un opérateur linéaire agissant dans E_2, l'opérateur linéaire $X_1 \otimes X_2$ agit sur le système composé comme suit,

$$(X_1 \otimes X_2)(y_1 \otimes y_2) = X_1(y_1) \otimes X_2(y_2) \quad y_1 \in E_1,\ y_2 \in E_2 \tag{1.73}$$

(action indépendante sur chacun des sous-systèmes).

Soit A une matrice $m \times m$, $A = (A_{ij})$ $(i, j = 1, \cdots m)$ et soit B une matrice $n \times n$, $B = (B_{\alpha\beta})$ $(\alpha, \beta = 1, \cdots, n)$. On appelle *produit tensoriel* $A \otimes B$ la matrice $mn \times mn$ définie par

$$(A \otimes B)_{i\alpha, j\beta} = A_{ij} B_{\alpha\beta}$$

(la paire $(i\alpha)$ prend mn valeurs distinctes). Si l'opérateur X a pour matrice A, $Xe_j = \sum_i A_{ij} e_i$, et l'opérateur Y a pour matrice B, $Y f_\beta = \sum_\alpha B_{\alpha\beta} f_\alpha$, alors l'opérateur $X \otimes Y$ a pour matrice $A \otimes B$.

Il existe une description utile du produit tensoriel en termes de polynômes. En effet, tout vecteur de E_1 peut être identifié à un polynôme homogène de degré un en m variables θ_i : si $v = \sum_i v_i e_i$ (avec $\{e_i\}$ base de E_1), alors le polynôme correspondant est simplement $P = \sum_i v_i \theta_i$. De même, tout vecteur de E_2 peut être identifié à un polynôme homogène de degré un en n variables ψ_α. Le produit tensoriel $E_1 \otimes E_2$ est alors identifié à l'espace des polynômes en les variables θ_i, ψ_α, homogènes de degré un en les θ_i et de degré un en les ψ_α. Une base est donnée par les monômes $\theta_i \psi_\alpha$.

Sous une transformation linéaire de E_1,

$$v \to v' = Lv,$$

on a $v' = \sum_i v_i e'_i$ (par linéarité) $= \sum_i v'_i e_i$ et donc si $e'_i = \sum_j L_{ji} e_j$, il suit $v'_i = \sum_j L_{ij} v_j$. Le nouveau polynôme P' associé au nouveau vecteur v' s'obtient [7] en remplaçant dans $\sum_i v_i \theta_i$ les variables θ_i par $\theta'_i = \sum_j L_{ji} \theta_j$. Sous forme matricielle,

$$\theta' = \theta L$$

où θ est le vecteur ligne $(\theta_1\ \theta_2\ \cdots\ \theta_m)$ et où L est à présent la matrice $L = (L_{ij})$. De même, il faut transformer les variables ψ_α comme $\psi'_\alpha = \sum_\beta M_{\beta\alpha} \psi_\beta$ sous une transformation linéaire de E_2 et donc les monômes $\theta_i \psi_\alpha$ de $E_1 \otimes E_2$ comme $\theta'_i \psi'_\alpha = \sum_{j,\beta} (L \otimes M)_{j\beta, i\alpha}\, \theta_j\, \psi_\beta$.

Propriétés élémentaires

1.
$$(A \otimes B)(A' \otimes B') = (AA') \otimes (BB') \tag{1.74}$$

7. Nous adoptons systématiquement le "point de vue actif" où les vecteurs se transforment.

En effet,

$$\begin{aligned}
((A\otimes B)(A'\otimes B'))_{i\alpha,j\beta} &= \sum_{k=1}^{m}\sum_{\gamma=1}^{n}(A\otimes B)_{i\alpha,k\gamma}\,(A'\otimes B')_{k\gamma,j\beta}\\
&= \sum_{k=1}^{m}\sum_{\gamma=1}^{n}A_{ik}\,B_{\alpha\gamma}\,A'_{kj}\,B'_{\gamma\beta}\\
&= (AA')_{ij}(BB')_{\alpha\beta}\\
&= (AA'\otimes BB')_{i\alpha,j\beta}.
\end{aligned}$$

2.

$$Tr(A\otimes B)=(TrA)(TrB) \tag{1.75}$$

En effet

$$\begin{aligned}
Tr(A\otimes B) &= \sum_{i,\alpha}(A\otimes B)_{i\alpha,i\alpha}\\
&= \sum_{i,\alpha}A_{ii}\,B_{\alpha\alpha}\\
&= (TrA)(TrB).
\end{aligned}$$

3.

$$(A\otimes B)^\dagger = A^\dagger\otimes B^\dagger \tag{1.76}$$

En effet,

$$\begin{aligned}
\left((A\otimes B)^\dagger\right)_{i\alpha,j\beta} &= (A\otimes B)^*_{j\beta,i\alpha}\\
&= A^*_{ji}\,B^*_{\beta\alpha}\\
&= (A^\dagger\otimes B^\dagger)_{i\alpha,j\beta}.
\end{aligned}$$

4.

$$A\otimes(B\oplus C) = (A\otimes B)\oplus(A\otimes C) \tag{1.77}$$
$$(A\oplus B)\otimes C = (A\otimes C)\oplus(B\otimes C). \tag{1.78}$$

Evident.

Représentation produit tensoriel

Soient T_1 et T_2 deux représentations d'un même groupe G. On appelle représentation produit tensoriel $T_1\otimes T_2$ la représentation donnée par les matrices

$$(T_1\otimes T_2)(g) = T_1(g)\otimes T_2(g). \tag{1.79}$$

On vérifie facilement que c'est une représentation de caractère donné par le produit des caractères de T_1 et T_2

$$\chi_{T_1\otimes T_2}(g) = \chi_{T_1}(g)\,\chi_{T_2}(g) \tag{1.80}$$

et qu'en outre, si T_1 et T_2 sont unitaires, alors $T_1 \otimes T_2$ est unitaire.

Il résulte de ce que nous avons indiqué ci-dessus que le produit tensoriel $T_1 \otimes T_2$ agit naturellement sur l'espace des polynômes bi-homogènes de degré 1 en les composantes θ_i et ψ_α des vecteurs des espaces vectoriels duaux. Pour les représentations équivalentes à leur duale (ce qui est le cas pour les représentations de $SU(2)$, voir plus bas), on peut de manière équivalente considérer les polynômes bi-homogènes de degré 1 en les composantes des vecteurs des espaces vectoriels eux-mêmes.

En général, la représentation produit tensoriel $T_1 \otimes T_2$ n'est pas irréductible même si T_1 et T_2 le sont. Nous verrons des exemples explicites plus bas. Un problème important en théorie des représentations est de déterminer les représentations irréductibles qui apparaissent dans la décomposition du produit tensoriel de deux représentations irréductibles quelconques. Il existe cependant des cas où $T_1 \otimes T_2$ est irréductible, comme la sous-section suivante le montre.

Représentation d'un produit direct

Soit T_1 une représentation du groupe G_1 et T_2 une représentation du groupe G_2. Alors T définie par

$$T((g_1, g_2)) = T_1(g_1) \otimes T_2(g_2) \tag{1.81}$$

est une représentation du produit direct $G_1 \times G_2$. On peut voir cette construction comme un cas particulier du produit tensoriel de deux représentations d'un *même* groupe, car toute représentation T_1 de G_1 dans l'espace X_1 est automatiquement une représentation de $G_1 \times G_2$ dans le même espace (notée également T_1), définie par la formule $T_1((g_1, g_2)) = T_1(g_1)$ (G_2 est représenté trivialement, cette extension n'est autre que le produit tensoriel de T_1 par la représentation triviale de G_2). De la même manière, toute représentation T_2 de G_2 définit une représentation de $G_1 \times G_2$ agissant trivialement sur le premier facteur.

Supposons les représentations T_1 et T_2 irréductibles. Alors $T_1 \otimes T_2$ est irréductible (on se place dans le cas où les seules représentations qui apparaissent sont complètement réductibles). En effet, soit A une matrice qui commute avec toutes les matrices de la représentation $T = T_1 \otimes T_2$,

$$\sum_{k,\gamma} A_{i\alpha,k\gamma} T(g)_{k\gamma,j\beta} = \sum_{k,\gamma} T(g)_{i\alpha,k\gamma} A_{k\gamma,j\beta}.$$

Prenant pour $g = (g_1, e_2)$ où e_2 est le neutre de G_2, on obtient $T(g)_{i\alpha,k\gamma} = T_1(g_1)_{ik}\, \delta_{\alpha\gamma}$ et la relation de commutation devient

$$\sum_k A_{i\alpha,k\beta} T_1(g_1)_{kj} = \sum_k T_1(g_1)_{ik} A_{k\alpha,j\beta} \quad \forall \alpha, \beta \quad \text{and} \quad \forall g_1 \in G_1,$$

ce qui implique $A_{i\alpha,j\beta} = \lambda_{\alpha\beta}\delta_{ij}$ car T_1 est irréductible. Utilisant cette information et considérant ensuite les éléments g de la forme $g = (e_1, g_2)$ pour lesquels $T(g)_{i\alpha,k\gamma} = \delta_{ik}\, T_2(g_2)_{\alpha\gamma}$, on tire

$$\delta_{ij} \sum_\gamma \lambda_{\alpha\gamma} T_2(g_2)_{\gamma\beta} = \delta_{ij} \sum_\gamma T_2(g_2)_{\alpha\gamma} \lambda_{\gamma\beta} \quad \forall g_2 \in G_2$$

d'où il vient $\lambda_{\alpha\beta} = \lambda\,\delta_{\alpha\beta}$ car T_2 est irréductible. La matrice A est donc multiple de l'identité et la représentation $T_1 \otimes T_2$ est dans ce cas-ci irréductible.

Générateurs infinitésimaux

Soient T_1 et T_2 deux représentations d'un groupe de Lie G et soient s_1, s_2 les représentations respectives de l'algèbre de Lie $\mathcal{G}$ de G. On vérifie par différentiation directe de $T_1(\exp ht) \otimes T_2(\exp ht)$ par rapport à t que la représentation de l'algèbre de Lie associée à la représentation $T_1 \otimes T_2$ est

$$s_1 \otimes I + I \otimes s_2. \tag{1.82}$$

1.4 Représentations irréductibles de $SU(2)$

1.4.1 Représentations irréductibles de $su(2)$

Les représentations irréductibles de $su(2)$ sont connues par les cours de mécanique quantique. Nous les redériverons rapidement ici en utilisant les notations de la mécanique quantique. Nous supposerons les représentations de $SU(2)$ unitaires, ce qui n'est en fait pas une limitation. Ceci veut dire que les générateurs infinitésimaux sont anti-hermitiens. Notant ces générateurs $-iJ_i$, il s'agit de trouver les représentations irréductibles de l'algèbre des moments cinétiques,

$$[J_i, J_j] = i\varepsilon_{ijk} J_k, \tag{1.83}$$

$$J_i^\dagger = J_i. \tag{1.84}$$

On pose

$$J^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(J_1 \pm iJ_2) \tag{1.85}$$

On a

$$[J_3, J^\pm] = \pm J^\pm, \quad [J^+, J^-] = J_3, \quad (J^+)^\dagger = J^-. \tag{1.86}$$

Les opérateurs $J^\pm$ sont des opérateurs d'échelle qui font monter ou descendre le moment cinétique selon z. Si $J_3|m\rangle = m|m\rangle$, alors $J_3(J^\pm|m\rangle) = (m \pm 1)J^\pm|m\rangle$. Par conséquent, si $J^+|m\rangle$ ($J^-|m\rangle$) n'est pas nul, c'est un vecteur propre de J_3 pour la valeur propre $m+1$ ($m-1$).

Considérons une représentation irréductible de $su(2)$. Puisque J_3 est hermitien (et que l'espace de la représentation est de dimension finie), J_3 est diagonalisable. Soit j (nombre réel) sa plus grande valeur propre et soient $|j, \alpha\rangle$ les vecteurs propres correspondants. Nous avons autorisé une dégénerescence éventuelle de la valeur propre maximum j, paramétrisée par l'indice α, mais nous verrons plus bas que les valeurs propres de J_3 sont en fait simples car la représentation est irréductible. On peut choisir les vecteurs $|j, \alpha\rangle$ tels que

$$\langle j, \beta | j, \alpha\rangle = \delta_{\alpha\beta}.$$

Puisque j est la valeur propre maximum, on a

$$J^+|j,\alpha\rangle = 0 \quad \forall\alpha.$$

Comme J^- abaisse la valeur propre de J_3 de une unité, on a

$$J^-|j,\alpha\rangle = N_j(\alpha)|j-1,\alpha\rangle$$

où $N_j(\alpha)$ est un facteur de normalisation. Un calcul direct donne

$$N_j(\beta)^* N_j(\alpha)\langle j-1,\beta|j-1,\alpha\rangle = \langle j,\beta|[J^+,J^-]|j,\alpha\rangle = j\delta_{\alpha\beta}$$

et donc, en choisissant $N_j(\alpha) = \sqrt{j}$, on a

$$\langle j-1,\beta|j-1,\alpha\rangle = \delta_{\alpha\beta}$$

(en outre $\langle j-1,\beta|j,\alpha\rangle = 0$ car ces états correspondent à des valeurs propres distinctes de J_3). En agissant avec J^+ sur $|j-1,\alpha\rangle$, on retombe sur $|j,\alpha\rangle$,

$$J^+|j-1,\alpha\rangle = \frac{1}{N_j}[J^+,J^-]|j,\alpha\rangle = N_j|j,\alpha\rangle.$$

Continuant à agir avec l'opérateur J^-, on engendre une suite de vecteurs orthonormés $|j-k,\alpha\rangle$ $(k = 0, 1, \cdots)$ tels que

$$\begin{aligned} J^-|j-k,\alpha\rangle &= N_{j-k}|j-k-1,\alpha\rangle \\ J^+|j-k-1,\alpha\rangle &= N_{j-k}|j-k,\alpha\rangle \\ N_{j-k} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(k+1)(2j-k)} \end{aligned}$$

comme on le voit par un argument de récurrence. [Supposons qu'on ait construit les vecteurs $|j,\alpha\rangle$, $|j-1,\alpha\rangle$, ..., $|j-k,\alpha\rangle$. Si $J^-|j-k,\alpha\rangle \neq 0$, on définit $|j-k-1,\alpha\rangle$ par $J^-|j-k,\alpha\rangle = N_{j-k}|j-k-1,\alpha\rangle$ où N_{j-k} est un facteur de normalisation qui peut être supposé réel et que l'on tire de $N_{j-k}^2 = \langle j-k,\alpha|J^+J^-|j-k,\alpha\rangle = \langle j-k,\alpha|J_3 + J^-J^+|j-k,\alpha\rangle$, ce qui donne $N_{j-k}^2 = j-k+N_{j-k+1}^2$ et donc l'expression cherchée de N_{j-k}. Agissant avec J^+ sur $|j-k-1,\alpha\rangle$ et utilisant l'algèbre, on obtient ensuite $J^+|j-k-1,\alpha\rangle = N_{j-k}|j-k,\alpha\rangle$.]

Puisque l'espace vectoriel est de dimension finie, il faut que le processus s'arrête pour un certain k. Il faut donc $N_{j-k} = 0$, c'-à-d., $2j-k = 0$ pour un certain k. Ceci n'est possible que si j est un entier ou un demi-entier non-négatif (k est un entier non-négatif). L'état correspondant à cette valeur de k est vecteur propre de J_3 pour la valeur propre $-j$ et le moment cinétique J_3 prend donc les $2j+1$ valeurs $j, j-1, \cdots, -j$.

En outre, on voit que les vecteurs avec différentes valeurs de α ne sont pas mélangés entre eux par les opérateurs de $su(2)$. Par conséquent le sous-espace associé à une valeur donnée de α est invariant. Ceci implique – puisque la représentation est irréductible – qu'une seule valeur de α apparaît, c-à-d. que les vecteurs propres de J_3 ne sont pas dégénérés. On peut laisser tomber l'indice α. Les représentations irréductibles de $su(2)$ sont donc caractérisées par un entier ou un demi-entier j positif ou nul et sont de dimension $2j+1$. On note D_j la représentation irréductible caractérisée par j. La représentation de dimension finie la plus générale de $su(2)$ est une somme directe de D_j's.

Vecteur de plus haut poids

Les valeurs propres de J_3 sont appelés *poids de la représentation*. Le vecteur propre correspondant à la valeur maximum j de D_j est appelé *vecteur de plus haut poids*.

Opérateur de Casimir $\vec{J}^2$

L'opérateur $\vec{J}^2 = \sum_i (J_i)^2 = J_3^2 + J^+J^- + J^-J^+$ commute avec les J_i,

$$[\vec{J}^2, J_i] = 0 \tag{1.87}$$

et est appelé *opérateur de Casimir*. D'après le lemme de Schur, il doit être multiple de l'identité. On vérifie en effet que $\vec{J}^2$ est diagonal dans les représentations construites et a pour seule valeur propre $j(j+1)$.

Notations habituelles

Les vecteurs associés aux différents poids $m = j, j-1, \cdots, -j$ de la représentation D_j sont habituellement notés $|j,m\rangle$. On a $m = j-k$. Les relations ci-dessus se récrivent

$$\langle j,m'|J_3|j,m\rangle = m\,\delta_{m,m'}, \tag{1.88}$$

$$\langle j,m'|J^+|j,m\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(j+m+1)(j-m)}\,\delta_{m',m+1}, \tag{1.89}$$

$$\langle j,m'|J^-|j,m\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(j+m)(j-m+1)}\,\delta_{m',m-1}, \tag{1.90}$$

$$\langle j,m'|\vec{J}^2|j,m\rangle = j(j+1)\,\delta_{m,m'}. \tag{1.91}$$

1.4.2 Représentations irréductibles D_j de $SU(2)$

On a vu qu'à chaque représentation du groupe correspond par différentiation une représentation de l'algèbre. En outre, à une représentation donnée de l'algèbre, il correspond au plus une représentation du groupe (si G est connexe). En fait, nous avons affirmé (sans démonstration) qu'il en correspond exactement une quand G est simplement connexe. Nous allons vérifier cette affirmation pour $SU(2)$ par construction explicite.

Soit E_j l'espace vectoriel des polynômes d'ordre $2j$ ($2j \in \mathbb{N}$) en deux variables complexes u, v. Une base de E_j est donnée par les monômes :

$$\{u^{2j}, u^{2j-1}v, u^{2j-2}v^2, \cdots, uv^{2j-1}, v^{2j}\}.$$

L'espace vectoriel E_j est donc de dimension $2j+1$. Il est clair que E_j est l'espace d'une représentation de $SU(2)$ car si on transforme linéairement les variables u, v selon

$$\begin{pmatrix} u' & v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u & v \end{pmatrix} U, \quad U \in SU(2)$$

les polynômes d'ordre $2j$ se transforment entre eux et la loi de produit est préservée [8]. Cette représentation de $SU(2)$ définit une représentation de $su(2)$ qui n'est autre que la représentation D_j car les poids (valeurs propres de J_3) y prennent bien les valeurs $j, j-1, \cdots, -j$.

En effet, pour

$$U(t) = \exp(-\frac{i\sigma_3 t}{2}) = \begin{pmatrix} \exp(-\frac{it}{2}) & 0 \\ 0 & \exp(\frac{it}{2}) \end{pmatrix},$$

les monômes $u^{2j-k}v^k$ se transforment comme suit,

$$u^{2j-k}v^k \rightarrow= \exp(-it(j-k))\, u^{2j-k}v^k$$

et sont donc vecteurs propres de l'opérateur

$$J_3 = -i\frac{d}{dt}|_{t=0}$$

pour la valeur propre $j-k$.

On note aussi D_j la représentation de $SU(2)$ ainsi définie. La représentation la plus générale de $SU(2)$ est donnée par

$$T = \bigoplus_{j\in\mathbb{N}\cup\mathbb{N}'} m_j D_j$$

où $\mathbb{N}'$ désigne l'ensemble $\{1/2+\mathbb{N}\}$ et où les multiplicités m_j sont nulles, à l'exception d'un nombre fini d'entre elles.

Une base (orthonormée) de l'espace vectoriel E_j dans laquelle les éléments de matrice des opérateurs J_3, J^+, J^- sont donnés par les expressions ci-dessus est donnée par

$$f_m = \frac{u^{j+m}v^{j-m}}{\sqrt{(j+m)!\,(j-m)!}} \qquad m = j, j-1, \cdots, -j.$$

(exercice)

1.4.3 Représentations irréductibles D_ℓ de $SO(3)$

Parmi les représentations de $SU(2)$, seules celles pour lesquelles $-I$ est représentée par l'identité sont des représentations de $SO(3)$. Ceci ne se produit que pour j entier, puisque les monômes de D_j sont multipliés par $(-1)^{2j}$ sous l'effet de la transformation $-I$ de $SU(2)$. Il existe donc des représentations de l'algèbre de Lie $so(3)$ qui ne sont pas des représentations de $SO(3)$, mais des représentations “à une phase (ici le signe) près”.

On peut voir l'espace de la représentation E_ℓ ($\ell \in \mathbb{N}$) comme l'espace des polynômes de degré ℓ en 3 variables réelles x, y, z obéissant à $\triangle P = 0$, ce qui

8. On appelle la représentation de $SU(2)$ ainsi définie *produit tensoriel (complètement) symétrisé* $(D_{\frac{1}{2}} \otimes D_{\frac{1}{2}} \otimes \cdots \otimes D_{\frac{1}{2}})_S$.

conduit aux Y^l_m (exercices). Le lien entre x, y, z et les monômes u^2, uv, v^2 est donné par $x = (1/2)(v^2 - u^2)$, $y = (1/2i)(u^2 + v^2)$ et $z = uv$ (voir section plus bas sur produits tensoriels). On appelle D_1 la représentation vectorielle [9]. Les polynômes de degré ℓ en 3 variables réelles x, y, z obéissant à $\triangle P = 0$ sont décrits par des tenseurs complètement symétriques $t_{i_1 \cdots i_\ell} = t_{(i_1 \cdots i_\ell)}$ de traces nulles ($t_{i_1 \cdots i_\ell} \delta^{i_j i_k} = 0$), $i_j = 1, 2, 3$. L'espace de la représentation E_ℓ peut donc être identifié à l'espace vectoriel de ces tenseurs.

La représentation la plus générale de $SO(3)$ est donnée par

$$T = \bigoplus_{\ell \in \mathbb{N}} m_\ell D_\ell$$

où les multiplicités m_ℓ sont nulles, à l'exception d'un nombre fini d'entre elles.

1.4.4 Caractères

On sait que les caractères de deux transformations conjuguées sont égaux. Deux rotations de même angle sont conjuguées. Les caractères de $SO(3)$ ne dépendent par conséquent que de l'angle de rotation φ, que l'on peut supposer être compris entre 0 et π puisque $R(\vec{n}, \varphi) = R(-\vec{n}, -\varphi)$. De même, tout élément de $SU(2)$ est conjugué à une matrice diagonale

$$\begin{pmatrix} e^{\frac{i\varphi}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{i\varphi}{2}} \end{pmatrix}$$

et donc les caractères de $SU(2)$ ne dépendent à nouveau que de l'"angle de rotation" φ, que l'on peut cette fois-ci supposer être compris entre 0 et 2π car les matrices

$$\begin{pmatrix} e^{\frac{i\varphi}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{i\varphi}{2}} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} e^{-\frac{i\varphi}{2}} & 0 \\ 0 & e^{\frac{i\varphi}{2}} \end{pmatrix}$$

sont conjuguées,

$$\begin{pmatrix} e^{-\frac{i\varphi}{2}} & 0 \\ 0 & e^{\frac{i\varphi}{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{\frac{i\varphi}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{i\varphi}{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On calcule les caractères de D_j dans la base $\{|jm\rangle\}$ en considérant une rotation autour de l'axe z. On trouve

$$\chi_j(\varphi) = \sum_{m=-j}^{m=j} e^{im\varphi} = \frac{\sin\left(j + \frac{1}{2}\right)\varphi}{\sin \varphi/2} \tag{1.92}$$

9. et $D_{\frac{1}{2}}$ la représentation spinorielle. Comme nous venons de le voir, celle-ci n'est cependant qu'une représentation au signe près de $SO(3)$. Un *spineur* se transforme selon $D_{\frac{1}{2}}$, un *vecteur* se transforme selon D_1.

En particulier,

$$\chi_0 = 1, \;\; \chi_{\frac{1}{2}} = 2\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right), \;\; \chi_1 - \chi_0 = 2\cos\varphi, \;\; \chi_{\frac{3}{2}} - \chi_{\frac{1}{2}} = 2\cos\left(\frac{3\varphi}{2}\right), \text{ etc} \tag{1.93}$$

Les caractères sont réels et obéissent aux relations d'othogonalité

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi(1-\cos\varphi)\chi_j(\varphi)^*\chi_{j'}(\varphi) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi\left[\sin\left(j+\frac{1}{2}\right)\varphi\right]\left[\sin\left(j'+\frac{1}{2}\right)\varphi\right] \\ &= \delta_{jj'} \end{aligned} \tag{1.94}$$

et constituent un système complet sur l'intervalle $[0, 2\pi]$. De même, les caractères de $SO(3)$ sont orthonormés (pour la mesure $(1/\pi)\, d\varphi(1-\cos\varphi)$) et forment un système complet sur $[0, \pi]$. Des propriétés analogues existent pour tous les groupes de Lie compacts.

Les caractères permettent de décomposer facilement une représentation générale. De

$$T = \bigoplus_j m_j D_j, \tag{1.95}$$

on tire

$$\chi_T = \sum_j m_j \chi_j. \tag{1.96}$$

Les multiplicités sont les coefficients des caractères χ_j dans la décomposition du caractère χ_T de T (décomposition unique car les caractères χ_j sont linéairement indépendants).

1.4.5 Représentations réelles, pseudo-réelles

On dit qu'une représentation T est *réelle* ssi il existe une base dans laquelle toutes les matrices de la représentation sont réelles,

$$T'(g) = ST(g)S^{-1}, \quad T'_{ij}(g)^* = T'_{ij}(g) \;\; \forall g \in G.$$

Dans ce cas, la représentation T est clairement équivalente à sa complexe conjuguée, que nous avons notée $\bar{T}$, $T \simeq \bar{T}$.

Il peut cependant se faire que $T \simeq \bar{T}$ sans que l'on puisse trouver une base dans laquelle toutes les matrices de la représentation sont réelles. On dit alors que T est *pseudo-réelle*. Enfin, on dit que la représentation T est *complexe* si $T \not\simeq \bar{T}$. Une condition nécessaire (et en fait suffisante pour les groupes compacts) pour qu'une représentation soit réelle ou pseudo-réelle est que son caractère soit réel.

La somme directe et le produit direct de représentations réelles sont réels.

Les représentations D_ℓ de spin entier sont réelles car les matrices de $SO(3)$ sont réelles et par conséquent aussi, celles donnant l'action de $SO(3)$ sur les polynomes de degré ℓ en les 3 composantes d'un vecteur.

La représentation $D_{\frac{1}{2}}$ est équivalente à sa complexe conjuguée, mais n'est pas réelle : elle est pseudo-réelle.

- $D_{\frac{1}{2}} \simeq \bar{D}_{\frac{1}{2}}$. En effet, l'équivalence est réalisée par la matrice hermitienne et unitaire σ_2 car on a

$$(i\sigma_k)^* = \sigma_2(i\sigma_k)\sigma_2.$$

Il en résulte

$$(\exp(ia_k\sigma_k))^* = \sigma_2 \exp(ia_k\sigma_k)\sigma_2.$$

- $D_{\frac{1}{2}}$ n'est pas réelle. Si on pouvait trouver une matrice inversible S telle que la matrice $U' = SUS^{-1}$ soit réelle pour tout $U \in SU(2)$, les matrices $\rho_i \equiv i\sigma_i' = iS\sigma_i S^{-1}$ seraient réelles, de trace nulle, de carré $-I$ et anticommuteraient. Or, ce problème (trouver un système de trois matrices ayant ces propriétés) n'a pas de solution sur les réels. En effet, toute matrice réelle A de carré $-I$ peut s'écrire

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \tag{1.97}$$

dans une base bien choisie : prendre comme premier vecteur de base un vecteur quelconque et comme deuxième vecteur de base son image par A. Supposons donc que l'une des matrices ρ_i, soit ρ_2 soit donnée par (1.97). Si une matrice anticommute avec (1.97), elle doit prendre la forme

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}.$$

Son carré est égal à $(a^2 + b^2)I$ et ne peut valoir $-I$ sur les réels.

Plus d'information sur les représentations réelles et pseudo-réelles est donnée dans l'annexe B. On y vérifie en particulier que les représentations D_j sont pseudo-réelles pour tout j demi-entier.

1.4.6 Produit tensoriel des représentations de $SU(2)$

Le produit tensoriel $D_j \otimes D_{j'}$, de dimension $(2j+1)(2j'+1)$ se décompose aisément en somme directe de D_j en utilisant les caractères. On a

$$\chi_{D_j \otimes D_{j'}}(\varphi) = \chi_{D_j}(\varphi)\chi_{D_{j'}}(\varphi) = \left(\sum_{m=-j}^{j} e^{im\varphi}\right)\left(\sum_{m'=-j'}^{j'} e^{im'\varphi}\right).$$

En effectuant le produit des exponentielles, on obtient (en supposant $j \geq j'$)

$$\begin{aligned} \chi_{D_j \otimes D_{j'}}(\varphi) \quad = \quad & e^{i(j+j')\varphi} + 2\, e^{i(j+j'-1)\varphi} + 3\, e^{i(j+j'-2)} + \cdots + 2j'\, e^{i(j-j'+1)\varphi} \\ & +(2j'+1)\left[e^{i(j-j')\varphi} + e^{i(j-j'-1)\varphi} + \cdots + e^{-i(j-j')\varphi}\right] \\ & +2j'\, e^{-i(j-j'+1)\varphi} + \cdots + 2\, e^{-i(j+j'-1)\varphi} + e^{-i(j+j')\varphi}, \end{aligned}$$

c'-à-d.

$$\chi_{D_j \otimes D_{j'}} = \sum_{k=|j-j'|}^{j+j'} \chi_k.$$

On en tire

$$D_j \otimes D_{j'} = \bigoplus_{k=|j-j'|}^{j+j'} D_k. \tag{1.98}$$

C'est la loi de composition des moments cinétiques. A noter que d'après (1.82), les composantes J_3 s'additionnent, $J_3^T = J_3^{(1)} + J_3^{(2)}$.

En particulier, la composition de deux moments cinétiques $\frac{1}{2}$ donne $D_{\frac{1}{2}} \otimes D_{\frac{1}{2}} = D_1 \oplus D_0$. On peut effectuer la décomposition explicite en observant que $D_{\frac{1}{2}} \otimes D_{\frac{1}{2}}$ agit dans l'espace des polynômes en les composantes u_1, u_2 et v_1, v_2 de deux spineurs u, v, homogènes de degré un en les u_i et homogènes de degré un en les v_i. De manière équivalente, on peut prendre v^* au lieu de v puisque $D_{\frac{1}{2}} \equiv D^*_{\frac{1}{2}}$. Une base de l'espace de la représentation est donnée par $\{v_1^* u_1, v_1^* u_2, v_2^* u_1, v_2^* u_2\}$. Une autre base est donnée par $\{v^\dagger u, v^\dagger \sigma_i u\}$. Cette nouvelle base assure la décomposition puisque $v^\dagger u$ se transforme comme un scalaire $((v')^\dagger u' = v^\dagger U^\dagger U u = v^\dagger u)$ tandis que les $v^\dagger \sigma_i u$ se transforment comme les composantes d'un vecteur ($U^\dagger \sigma_i U = \sum_j O(U)_{ij} \sigma_j$). On peut alternativement remplacer v^* par $\sigma_2 v$ qui se transforme exactement de la même façon ($(v')^* = U^* v$ et $\sigma_2 v' = U^* \sigma_2 v$). $v^t \sigma_2 u = i\varepsilon_{ij} v_i u_j$ est un scalaire et les $v^t \sigma_2 \sigma_i u$ se transforment comme les composantes d'un vecteur. Si on fait $u = v$ (produit tensoriel symétrique, polynômes quadratiques en u_1, u_2), on élimine D_0 et on extrait la représentation D_1. Les $u^t \sigma_2 \sigma_i u$ se transforment comme les composantes d'un vecteur et coïncident avec les combinaisons introduites à la sous-section **1.4.3** (à un facteur près).

Coefficients de Clebsch-Gordan

On passe de la base orthonormée $\{|jm\rangle \otimes |j'm'\rangle \equiv |jj'mm'\rangle\}$ de $D_j \otimes D_{j'}$ à la base orthormée $\{|JM\rangle\}$ ($J = |j-j'|, |j-j'|+1, \cdots, j+j'$, $M = -J, -J+1, \cdots, J$) adaptée à la décomposition en somme directe par une transformation unitaire,

$$|JM\rangle = \sum_{m+m'=M} C^{jj'}_{mm';JM} |jj'mm'\rangle. \tag{1.99}$$

Les coefficients $C^{jj'}_{mm';JM}$ sont appelés coefficients de Clebsch-Gordan. La convention de phase habituelle est $C^{jj'}_{mm';JM=J}$ réel ≥ 0.

1.5 Parité – Représentations de $O(3)$

On a vu que $O(3) \simeq \mathbb{Z}_2 \times SO(3)$. Le groupe commutatif Z_2 possède deux représentations irréductibles inéquivalentes, toutes deux de dimension 1 : la représentation triviale, notée $(+)$, qui envoie -1 sur 1, et la représentation qui envoie -1 sur -1, notée $(-)$. En prenant le produit tensoriel de ces représentations avec les D_ℓ, on obtient les représentations irréductibles de $O(3)$. Chaque représentation irréductible de $SO(3)$ donne ainsi lieu à deux représentations irréductibles de $O(3)$, notées $D_\ell^{(\pm)}$, selon que la parité P est représenté par I ou $-I$. On a

$$D_\ell^{(+)}(PR(\vec{n},\varphi)) = D_\ell(R(\vec{n},\varphi)) = D_\ell^{(+)}(R(\vec{n},\varphi))$$

et

$$D_\ell^{(-)}(PR(\vec{n},\varphi)) = -D_\ell(R(\vec{n},\varphi)) = -D_\ell^{(-)}(R(\vec{n},\varphi)).$$

Il n'y a pas d'autre représentation irréductible, car dans toute représentation irréductible de $O(3)$, la parité doit être représentée par un multiple $\pm I$ de l'identité et donc, une représentation irréductible de $O(3)$ ne peut être réductible pour $SO(3)$.

Pour les représentations de spin demi-entier, on considère le groupe $Z_2 \times SU(2)$ obtenu en ajoutant un élément p de carré 1, qui commute avec $SU(2)$. On étend l'homomorphisme f à $Z_2 \times SU(2)$ par $f((p^k, U)) = P^k f(U)$. Les représentations irréductibles de $Z_2 \times SU(2)$ s'obtiennent par produit tensoriel comme ci-dessus et se distinguent par le signe de l'image de p, qui doit être égale à $+I$ ou $-I$.

Annexe A : Une représentation réductible qui n'est pas complètement réductible

Considérons le groupe abélien $\mathbb{R}, +$ des nombres réels muni de l'addition. L'application

$$a \in \mathbb{R} \mapsto T(a) = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

est une représentation à 2 dimensions de $\mathbb{R}$. Elle est réductible, le sous-espace à une dimension des multiples du vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ étant invariant. Elle n'est cependant pas complètement réductible car on ne peut diagonaliser simultanément toutes les matrices $T(a)$. En fait, on ne peut pas diagonaliser $T(a)$ lorsque $a \neq 0$: il n'existe pas de deuxième vecteur propre linéairement indépendant de $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. A noter que le groupe $\mathbb{R}, +$ n'est pas compact.

Annexe B : Représentations réelles et pseudo-réelles

Décomposition polaire d'une matrice de $GL(n, \mathbb{C})$

Soit S une matrice de $GL(n, \mathbb{C})$. Celle-ci peut s'écrire de manière unique sous la forme

$$S = UH$$

où U est une matrice unitaire et où H est une matrice hermitienne définie positive (c'-à-d. dont les valeurs propres sont strictement positives).

En effet, la matrice $S^\dagger S$ étant hermitienne, peut être diagonalisée par une transformation unitaire,

$$S^\dagger S = U_1 \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ & & & \vdots & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} U_1^\dagger .$$

D'autre part, $(Sx, Sx) = (x, S^\dagger Sx) \geq 0$ avec $(Sx, Sx) = 0$ ssi $Sx = 0$ c'-à-d. $x = 0$ (car $\det S \neq 0$). Donc, les valeurs propres λ_i sont strictement positives car $(x, S^\dagger Sx) = \sum_i \lambda_i |(U_1^\dagger x)_i|^2$. On définit

$$H = U_1 \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ & & & \vdots & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \sqrt{\lambda_{n-1}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix} U_1^\dagger .$$

On a clairement $H^2 = S^\dagger S$ et $H^\dagger = H$. La matrice $U = SH^{-1}$ est unitaire, $U^\dagger U = H^{-1} S^\dagger S H^{-1} = I$, et on a $S = UH$. C'est la décomposition polaire annoncée.

Pour démontrer l'unicité de la décomposition polaire, on note que si $P(\lambda)$ est un polynôme en λ tel que $P(\lambda_i) = \sqrt{\lambda_i}$, alors, $H = P(S^\dagger S)$. Par conséquent, toute matrice qui commute avec $S^\dagger S$ commute aussi avec H.

Soit $S = U'H'$ avec U' et H' ayant les propriétés requises. La matrice H' commute avec $H'^2 = S^\dagger S$ et donc avec H, $[H', H] = 0$. On en déduit que $H = H'$ car H et H' sont simultanément diagonalisables et leurs valeurs propres positives, de même carrés, sont égales. On tire ensuite $U' = U$.

Représentations unitaires équivalentes

Soient T et $\tilde{T}$ deux représentations unitaires équivalentes d'un même groupe G,

$$T(g) = S\tilde{T}(g)S^{-1} \quad \forall g \in G.$$

On peut sans nuire à la généralité supposer que S est unitaire,

$$T(g) = U\tilde{T}(g)U^\dagger \quad \forall g \in G\,, \quad UU^\dagger = U^\dagger U = I.$$

En effet, on tire de $T(g) = S\tilde{T}(g)S^{-1}$ que $T^\dagger(g) = (S^{-1})^\dagger \tilde{T}^\dagger(g) S^\dagger$ et aussi, puisque T et $\tilde{T}$ sont unitaires, que $T^\dagger(g) = T^{-1}(g) = S\tilde{T}^\dagger(g)S^{-1}$. Par conséquent, $(S^{-1})^\dagger \tilde{T}^\dagger(g) S^\dagger = S\tilde{T}^\dagger(g)S^{-1}$, ce qui implique $S^\dagger S\tilde{T}(g) = \tilde{T}(g)S^\dagger S$. On en conclut que $\tilde{T}(g)$ commute avec la matrice H apparaissant dans la décomposition polaire $S = UH$ de S, d'où on tire $T(g) = U\tilde{T}(g)U^\dagger$ comme annoncé.

Forme bilinéaire invariante

Un forme bilinéaire B sur un espace vectoriel complexe V est une application

$$B : V \times V \to C$$

qui est *linéaire* en chacun de ses arguments,

$$\begin{aligned} B(\lambda x, y) &= \lambda B(x, y) \\ B(x, \lambda y) &= \lambda B(x, y) \end{aligned} \tag{1.100}$$

(et pas $B(\lambda x, y) = \lambda^* B(x, y)$). Dans une base, en terme de matrices,

$$B(x, y) = x^t By.$$

Soit T une représentation du groupe G. La forme bilinéaire B est invariante ssi

$$B(T(g)x, T(g)y) = B(x, y)$$

ou encore, en terme de matrices, $x^t(T(g))^t BT(g)y = x^t By$ c'-à-d.

$$(T(g)^t BT(g) = B.$$

Supposons B non dégénérée, de sorte que B^{-1} existe. La condition d'invariance est alors équivalente à

$$T(g) = B^{-1}(T(g)^t)^{-1}B$$

Nous supposerons à présent que la représentation T (et toutes les représentations apparaissant dans la discussion) sont unitaires, ce qui n'est pas une restriction pour les groupes compacts. La condition d'invariance de la forme bilinéaire non dégénérée B prend alors la forme

$$T(g) = B^{-1}T(g)^*B$$

qui exprime que $T \sim T^*$. Une représentation unitaire qui admet une forme bilinéaire invariante non dégénérée est donc réelle ou pseudo-réelle. Inversément, si la représentation unitaire T est équivalente à sa complexe conjuguée, alors en répétant les arguments dans l'ordre inverse, on voit qu'il existe une forme bilinéaire invariante non dégénérée. On a ainsi démontré :

Théorème : La représentation unitaire T du groupe G est réelle ou pseudo-réelle ssi elle admet une forme bilinéaire invariante non dégénérée.

Représentations irréductibles réelles ou pseudo-réelles

Théorème : Si la représentation irréductible T du groupe G admet une forme bilinéaire invariante non dégénérée, celle-ci est unique à un facteur multiplicatif près.

Démonstration : Soient B et B' deux formes bilinéaires invariantes non dégénérées. On a

$$(T(g))^t \, B \, T(g) = B$$
$$(T(g))^t \, B' \, T(g) = B' \, .$$

On en tire

$$(T(g))^{-1} \, B'^{-1} \left(T(g)^{-1}\right)^t = B'^{-1}$$

et ensuite

$$(T(g))^{-1} \, B'^{-1} B \, T(g) = B'^{-1} B$$

ou encore

$$(B'^{-1}B)T(g) = T(g)(B'^{-1}B) \, .$$

Comme la représentation T est irréductible, le lemme de Schur implique

$$B'^{-1}B = \lambda \, I$$

c'-à-d. le résultat annoncé

$$B = \lambda \, B' \, .$$

Corollaire : Pour une représentation irréductible, les formes bilinéaires invariantes non dégénérées sont soit toutes symétriques, soit toutes antisymétriques.

Démonstration : En effet, si B est une forme bilinéaire invariante non dégénérée, alors B^t est aussi une forme bilinéaire invariante non dégénérée et donc $B^t = \lambda B$. Mais $(B^t)^t = B$, ce qui implique $\lambda^2 = 1$ ou encore $\lambda = \pm 1$. Donc B - de même que tous ses multiples - est soit symétrique, soit antisymétrique. cqfd

On notera que si les formes bilinéaires invariantes non dégénérées sont antisymétriques, la dimension de la représentation est paire.

Théorème :
- Une représentation unitaire irréductible est réelle ssi elle admet une forme bilinéaire invariante non dégénérée symétrique.
- Une représentation unitaire irréductible est pseudo-réelle ssi elle admet une forme bilinéaire invariante non dégénérée antisymétrique.

Démonstration : En vertu de ce que l'on vient de voir, il suffit de démontrer l'une des deux propositions. On démontre la première.

Si la représentation unitaire T est réelle, alors

$$T(g) = ST'(g)S^{-1} \, ,$$
$$T'(g)^* = T'(g) \, .$$

Soit $S = UH$ la décomposition polaire de la matrice S. Comme la matrice $HT'(g)H^{-1} = U^\dagger T(g)U$ est unitaire, on a, en utilisant $T'(g) = T'(g)^*$,

$$T'(g)^t H^2 T'(g) = H^2 \, .$$

En remplaçant $T'(g)$ par $S^{-1}T(g)S$, on tire que la forme bilinéaire

$$B = (S^{-1})^t H^2 S^{-1}$$

est invariante,

$$(T(g))^t BT(g) = B\,.$$

Comme la représentation est irréductible, B est soit symétrique, soit antisymétrique et donc $(S^{-1})^t(H^2)^t S^{-1} = \pm(S^{-1})^t H^2 S^{-1}$ ou encore $(H^2)^t = \pm H^2$. Mais la matrice H^2 ne peut être antisymétrique car ses valeurs propres seraient alors positives et négatives (si λ est valeur propre d'une matrice antisymétrique, $-\lambda$ l'est aussi). Il s'en suit que H^2 est symétrique et donc $B^t = B$.

Inversément, supposons que la représentation unitaire irréductible T admet une forme bilinéaire invariante non dégénérée symétrique B. On a

$$T^*(g) = BT(g)B^{-1}\,, \quad B = B^t\,.$$

Sans nuire à la généralté, on peut supposer que B est unitaire (les représentations T et T^* étant unitaires et équivalentes, elles sont unitairement équivalentes, et donc $\exists B'$ unitaire telle que $T^*(g) = B'T(g)B'^{-1}$; cette équation exprime que B' est invariante et donc aussi nécessairement symétrique). La matrice B ťant symétrique et unitaire, on a,

$$B^*B = I = BB^*\,.$$

Soit $Z = B + kI$, où k est un nombre complexe de module 1 tel que Z^{-1} existe (il existe au moins un tel k car le polynôme en z

$$\det(B + zI)$$

n'est pas identiquement nul et possède donc un nombre fini de zéros). On a

$$Z^*B = (B^* + k^*I)B = I + k^*B = k^*(kI + B) = k^*Z\,.$$

Les matrices $T'(g) = ZT(g)Z^{-1}$, équivalentes aux matrices $T(g)$, sont réelles,

$$T'(g)^* = Z^*T^*(g)(Z^{-1})^* = Z^*BT(g)(Z^*B)^{-1} = k^*ZT(g)(k^*)^{-1}Z^{-1} = T'(g)\,.$$

La représentation est donc réelle. cqfd

Propriétés de réalité des représentations irréductibles de $SU(2)$

Nous avons vu que les vecteurs de la représentation D_j pouvaient être identifiés aux polynômes d'ordre $2j$ en les variables complexes $(u, v) \equiv (u^1, u^2)$ ou, ce qui est la même chose, aux tenseurs complètement symétriques $m_{i_1 i_2 \cdots i_{2j}} = m_{(i_1 i_2 \cdots i_{2j})}$ $(i_k = 1, 2)$.

La forme bilinéaire

$$B^{i_1 i_2 \cdots i_{2j} ; j_1 j_2 \cdots j_{2j}} m_{i_1 i_2 \cdots i_{2j}} n_{j_1 j_2 \cdots j_{2j}} = \varepsilon^{i_1 j_1} \varepsilon^{i_2 j_2} \cdots \varepsilon^{i_{2j} j_{2j}} m_{i_1 i_2 \cdots i_{2j}} n_{j_1 j_2 \cdots j_{2j}}$$

est invariante car ε^{ij} est invariant. Elle est aussi non dégénérée car $\det(\varepsilon^{ij}) \neq 0$. Enfin, $B^{i_1 i_2 \cdots i_{2j}; j_1 j_2 \cdots j_{2j}} = (-1)^{2j} B^{j_1 j_2 \cdots j_{2j}; i_1 i_2 \cdots i_{2j}}$. Il en résulte que les représentations de spin demi-entier sont pseudo-réelles tandis que les représentations de spin entier sont réelles.

Chapitre 2

Représentations du groupe de Lorentz

2.1 Les groupes $O(3,1)$, $L^{\uparrow}$ et $L_+^{\uparrow}$

2.1.1 Groupe $L_+^{\uparrow}$

Groupe $L \equiv SO(3,1)$

Le groupe de Lorentz $O(3,1)$ est le groupe des transformations linéaires *pseudo-orthogonales* de l'espace vectoriel réel à 4 dimensions qui préservent le produit scalaire minkowskien. En terme de matrices,

$$\Lambda \in O(3,1) \quad \Leftrightarrow \quad \Lambda^t \, \eta \Lambda = \eta \tag{2.1}$$

où η est la matrice

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

de signature $(-,+,+,+)$. On désigne également le groupe de Lorentz $O(3,1)$ par L.

Les lignes et les colonnes d'une matrice de $O(3,1)$ définissent des bases orthonormées de l'espace de Minkowski ("bases de Lorentz").

Groupe L_+

De $\Lambda^t \, \eta \Lambda = \eta$, on tire $(\det \Lambda)^2 = 1$ et donc $\det \Lambda = \pm 1$. Les transformations de déterminant $+1$ forment un sous-groupe préservant l'orientation d'espace-temps, noté L_+. Les lignes et les colonnes d'une matrice de L_+ définissent des bases de Lorentz d'orientation positive.

Groupe $L^\uparrow$

On a également, en prenant la composante 00 de $\Lambda^t\,\eta\Lambda = \eta$, $-1 = -(\Lambda^0{}_0)^2 + \sum_k(\Lambda^k{}_0)^2$ et donc

$$(\Lambda^0{}_0)^2 = 1 + \sum_k(\Lambda^k{}_0)^2 \geq 1 \tag{2.2}$$

avec égalité ssi $\Lambda^k{}_0 = 0$. De même, en prenant l'inverse de (2.1), on a $\Lambda^{-1}\,\eta(\Lambda^t)^{-1} = \eta$ $(\eta^{-1} = \eta)$ pour toute matrice de Lorentz et par conséquent aussi $\Lambda\eta\Lambda^t = \eta$ $(\Lambda^{-1} \in L$ si $\Lambda \in L)$ d'où l'on tire

$$(\Lambda^0{}_0)^2 = 1 + \sum_k(\Lambda^0{}_k)^2 \geq 1 \tag{2.3}$$

avec égalité ssi $\Lambda^0{}_k = 0$. On voit aussi que $(\Lambda^0{}_0)^2 = 1 \Leftrightarrow \Lambda^k{}_0 = 0 \Leftrightarrow \Lambda^0{}_k = 0$ et dans ce cas, la matrice spatiale $(\Lambda^j{}_k)$ définit un élément de $O(3)$.

Les transformations telles que $\Lambda^0{}_0 \geq 1$ forment un sous-groupe noté $L^\uparrow$ en vertu de l'inégalité de Schwartz. On a en effet, pour $\Lambda_1, \Lambda_2 \in L^\uparrow$,

$$\begin{aligned}
(\Lambda_1\Lambda_2)^0{}_0 &= (\Lambda_1)^0{}_0(\Lambda_2)^0{}_0 + \sum_k(\Lambda_1)^0{}_k(\Lambda_2)^k{}_0 \\
&> \sqrt{\sum_k((\Lambda_1)^0{}_k)^2}\sqrt{\sum_k\left((\Lambda_2)^k{}_0\right)^2} + \sum_k(\Lambda_1)^0{}_k(\Lambda_2)^k{}_0 \\
&> \sqrt{\sum_k((\Lambda_1)^0{}_k)^2}\sqrt{\sum_k\left((\Lambda_2)^k{}_0\right)^2} - |\sum_k(\Lambda_1)^0{}_k(\Lambda_2)^k{}_0| \\
&> 0
\end{aligned}$$

car $\mathbf{a}^2\mathbf{b}^2 \geq |\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}|$, et donc, $(\Lambda_1\Lambda_2)^0{}_0 \geq 1$. On appelle $L^\uparrow$ le *groupe de Lorentz orthochrone*. Les transformations de $L^\uparrow$ préservent le sens d'écoulement du temps. Les lignes et les colonnes d'une matrice de $L^\uparrow$ définissent des bases de Lorentz dont le premier vecteur e_0 pointe vers le futur.

Groupe $L_+^\uparrow$

Le groupe $L_+^\uparrow$ est l'intersection de L_+ avec $L^\uparrow$,

$$L_+^\uparrow = L_+ \cap L_+^\uparrow. \tag{2.4}$$

Les transformations de $L_+^\uparrow$ préservent à la fois le sens d'écoulement du temps et l'orientation d'espace. Les lignes et les colonnes d'une matrice de $L_+^\uparrow$ définissent des bases de Lorentz d'orientation positive, dont le premier vecteur e_0 pointe vers le futur.

Soit $R \in SO(3)$ une rotation de l'espace euclidien à 3 dimensions. La matrice 4×4

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix} \quad (R \in SO(3)) \tag{2.5}$$

appartient au groupe $L^{\uparrow}_{+}$. Le groupe $SO(3)$ est donc isomorphe à un sous-groupe de $L^{\uparrow}_{+}$. Nous identifierons ci-dessous $SO(3)$ au sous-groupe des matrices de la forme (2.5), que nous appellerons "rotations".

Nous étudierons ici les représentations de dimension finie de $L^{\uparrow}_{+}$ et $L^{\uparrow}$. On peut engendrer $L^{\uparrow}$ en ajoutant à $L^{\uparrow}_{+}$ l'opérateur de parité

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

qui, contrairement à ce qui se passe pour $O(3)$ et $SO(3)$, *ne commute pas avec toutes les matrices de* $L^{\uparrow}_{+}$.

2.1.2 Décomposition standard d'un élément de $L^{\uparrow}_{+}$

Transformation de Lorentz propre ("boost")

On appelle *transformations de Lorentz propre* dans la direction x, ou encore *boosts* dans la direction x, les transformations de Lorentz dont les matrices ont la forme

$$\begin{pmatrix} \cosh\gamma & \sinh\gamma & 0 & 0 \\ \sinh\gamma & \cosh\gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \gamma \in \mathbb{R}.$$

Ces transformations forment un sous-groupe à un paramètre de $L^{\uparrow}_{+}$. Le paramètre γ est parfois appelé rapidité.

Théorème : Toute transformation $\Lambda \in L^{\uparrow}_{+}$ peut se décomposer en le produit

$$\Lambda = R_1 L(\gamma) R_2 \quad (\Lambda \in L^{\uparrow}_{+}) \tag{2.6}$$

où R_1 et R_2 sont des rotations d'espace et où $L(\gamma)$ est une transformation de Lorentz propre dans la direction x ("décomposition standard").

Démonstration : Soit $\vec{a}$ le vecteur de $\mathbb{R}^3$ de composantes $({\Lambda^k}_0)$. Si $\vec{a} = 0$, alors ${\Lambda^0}_k = 0$ et la matrice Λ prend la forme

$$\rho = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix}$$

où la matrice S doit évidemment appartenir à $SO(3)$. La décomposition (2.6) est satisfaite avec $R_1 = I$, $L(\gamma) = I$ et $R_2 = \rho$.

Supposons donc $\vec{a} \neq 0$. Notons $\vec{e}_1$ un des deux vecteurs de norme 1 proportionnel à $\vec{a}$, $\vec{e}_1 = \lambda\vec{a}$, $(\vec{e}_1)^2 = 1$. On note $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ ses composantes. Soient $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$ tels que $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ soit une base orthonormée d'orientation positive. Soient $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$, $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ leurs composantes respectives.

Formons la matrice de rotation $\bar{R}_1$

$$\bar{R}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ 0 & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ 0 & \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{pmatrix}.$$

Le produit $\bar{R}_1\Lambda \in L_+^\uparrow$ prend la forme

$$\bar{R}_1\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ 0 & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ 0 & \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Lambda^0{}_0 & \Lambda^0{}_1 & \Lambda^0{}_2 & \Lambda^0{}_3 \\ \Lambda^1{}_0 & \Lambda^1{}_1 & \Lambda^1{}_2 & \Lambda^1{}_3 \\ \Lambda^2{}_0 & \Lambda^2{}_1 & \Lambda^2{}_2 & \Lambda^2{}_3 \\ \Lambda^3{}_0 & \Lambda^3{}_1 & \Lambda^3{}_2 & \Lambda^3{}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Lambda^0{}_0 & \Lambda^0{}_1 & \Lambda^0{}_2 & \Lambda^0{}_3 \\ \times & \times & \times & \times \\ 0 & \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 \\ 0 & \nu_1 & \nu_2 & \nu_3 \end{pmatrix}$$

où les $\times$ sont des nombres dont la valeur ne ne nous intéresse pas et où les μ_i et les ν_i définissent des vecteurs orthogonaux et normés de $\mathbb{R}^3$ (car $\bar{R}_1\Lambda \in L_+^\uparrow$) que nous noterons respectivement $\vec{f_2}$ et $\vec{f_3}$. Soit $\vec{f_1}$ le vecteur normé, orthogonal à $\vec{f_2}$ et $\vec{f_3}$, tel que $\{\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}\}$ soit une base orthonormée d'orientation positive. Soient $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$ ses composantes. On définit la rotation $\bar{R}_2$ par

$$\bar{R}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & \mu_1 & \nu_1 \\ 0 & \lambda_2 & \mu_2 & \nu_2 \\ 0 & \lambda_3 & \mu_3 & \nu_3 \end{pmatrix}.$$

Le produit $\bar{R}_1\Lambda\bar{R}_2$ prend la forme

$$\bar{R}_1\Lambda\bar{R}_2 = \begin{pmatrix} \Lambda^0{}_0 & \Lambda^0{}_1 & \Lambda^0{}_2 & \Lambda^0{}_3 \\ \times & \times & \times & \times \\ 0 & \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 \\ 0 & \nu_1 & \nu_2 & \nu_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & \mu_1 & \nu_1 \\ 0 & \lambda_2 & \mu_2 & \nu_2 \\ 0 & \lambda_3 & \mu_3 & \nu_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Lambda^0{}_0 & \times & k & l \\ \times & \times & m & n \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Comme $\bar{R}_1\Lambda\bar{R}_2 \in L_+^\uparrow$, la matrice 2×2

$$\begin{pmatrix} k & l \\ m & n \end{pmatrix}$$

est nulle car les deux premières lignes de $\bar{R}_1\Lambda\bar{R}_2$ sont orthogonales aux deux dernières. La matrice $\bar{R}_1\Lambda\bar{R}_2$ est donc diagonale par blocs,

$$\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

où B est une matrice 2×2 appartenant au groupe $L_+^\uparrow$ à 2 dimensions. Ceci implique

$$B = \begin{pmatrix} \cosh\gamma & \sinh\gamma \\ \sinh\gamma & \cosh\gamma \end{pmatrix}$$

pour un certain γ et donc $\bar{R}_1\Lambda\bar{R}_2 = L(\gamma)$. On en tire la décomposition cherchée, $\Lambda = R_1 L(\gamma) R_2$ avec $R_1 = (\bar{R}_1)^{-1}$ et $R_2 = (\bar{R}_2)^{-1}$.

A noter que la décomposition standard n'est pas unique.

Le groupe $L_+^{\uparrow}$ est connexe

C'est une conséquence de la décomposition standard, chacun des facteurs y apparaissant étant lui-même connexe. Il en résulte que $L_+^{\uparrow}$ est un sous-groupe normal du groupe de Lorentz $O(3,1)$ et que celui-ci possède exactement 4 composantes connexes, notées

$$\begin{array}{llll} L_+^{\uparrow}: & {\Lambda^0}_0 \geq 1 & \text{et} & \det\Lambda = 1, \\ L_-^{\uparrow}: & {\Lambda^0}_0 \geq 1 & \text{et} & \det\Lambda = -1, \\ L_+^{\downarrow}: & {\Lambda^0}_0 \leq -1 & \text{et} & \det\Lambda = 1, \\ L_-^{\downarrow}: & {\Lambda^0}_0 \leq -1 & \text{et} & \det\Lambda = -1. \end{array}$$

En effet, on ne peut passer continûment d'une composante à une autre car il faut "sauter" pour passer de ${\Lambda^0}_0 \geq 1$ à ${\Lambda^0}_0 \leq -1$ ou de $\det\Lambda = 1$ à $\det\Lambda = -1$.

Les groupes L_+ et $L^{\uparrow}$ sont respectivement donnés par $L_+^{\uparrow} \cup L_+^{\downarrow}$ et $L_+^{\uparrow} \cup L_-^{\uparrow}$. A noter que $L_+^{\uparrow} \cup L_-^{\downarrow}$ est aussi un groupe.

2.1.3 Le groupe $SL(2,\mathbb{C})$

Définition

Le groupe $SL(2,\mathbb{C})$ est le groupe des transformations de l'espace vectoriel complexe $\mathbb{C}^2$ qui préservent le volume. En terme de matrices, $SL(2,\mathbb{C})$ est le groupe des matrices 2×2 complexes de déterminant unité :

$$S = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2,\mathcal{C}) \quad\Leftrightarrow\quad \det S = 1 \quad\Leftrightarrow\quad ad - bc = 1 \tag{2.7}$$

$(a,b,c,d \in \mathbb{C})$.

Connexité

Le groupe $SL(2,\mathbb{C})$ est connexe : toute transformation de $SL(2,\mathbb{C})$ peut être continûment déformée en l'identité. En effet, soit

$$S = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

une matrice de $SL(2,\mathbb{C})$. Les vecteurs de composantes respectives (a,b) et (c,d) sont linéairement indépendants. Par le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt, on peut leur associer une base orthonormée dont les vecteurs ont pour composantes $\bar\alpha(a,b)$ et $\bar\gamma(a,b)+\bar\beta(c,d)$ où $\bar\alpha$, $\bar\gamma$ et $\bar\beta$ sont des nombres complexes bien choisis. En d'autre termes, il existe une matrice

$$\bar K = \begin{pmatrix} \bar\alpha & 0 \\ \bar\gamma & \bar\beta \end{pmatrix}$$

telle que la matrice $U = \bar K S$,

$$U = \bar K S = \begin{pmatrix} \bar\alpha & 0 \\ \bar\gamma & \bar\beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar\alpha a & \bar\alpha b \\ \bar\gamma a + \bar\beta c & \bar\gamma b + \bar\beta d \end{pmatrix}$$

est unitaire. On peut prendre $\bar{\alpha}^{-1} = \sqrt{|a|^2 + |b|^2}$; $\bar{\alpha}$ est ainsi un nombre réel strictement positif. Comme $\det \bar{K} = \bar{\alpha}\bar{\beta} = \det U$ est un nombre complexe de module 1 et que le deuxième vecteur de la base orthonormée est déterminé à un nombre complexe de module 1 près, on peut supposer $\det(\bar{K}S) = 1$ et $\bar{\beta} = 1/\bar{\alpha}$: $\bar{\beta}$ est aussi un nombre réel strictement positif. Par conséquent, toute matrice $S \in SL(2,\mathbb{C})$ peut se décomposer de la manière suivante,

$$S = KU, \quad U \in SU(2), \quad K = \begin{pmatrix} k & 0 \\ m & \frac{1}{k} \end{pmatrix}, \quad k \in \mathbb{R}_+$$

($\mathbb{R}_+$: nombres réels strictement positifs). On note K le groupe des matrices triangulaires de déterminant 1 du type de K ci-dessus.

Le groupe $SU(2)$ est connexe. Le groupe K l'est aussi : on peut relier l'identité à $K \in$ K de manière continue par la courbe

$$K(t) = \begin{pmatrix} 1 + (k-1)t & 0 \\ mt & \frac{1}{1+(k-1)t} \end{pmatrix}, \quad t \in [0,1].$$

Il en résulte que $SL(2,\mathbb{C})$ est connexe. En fait, $SU(2)$ est simplement connexe. Les courbes fermées de K, qui est homéomorphe à l'espace $\mathbb{C} \times \mathbb{R}_+$, sont aussi contractibles à un point. Par conséquent, $SL(2,\mathbb{C})$ est également simplement connexe.

Centre de $SL(2,\mathbb{C})$

On vérifie facilement que le centre de $SL(2,\mathbb{C})$ est donné par

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\} \simeq \mathbb{Z}_2$$

(par exemple, en considérant la commutation avec les matrices $i\sigma_i \in SL(2,\mathbb{C})$).

2.2 Isomorphisme $L_+^\uparrow \simeq \frac{SL(2,\mathbb{C})}{\mathbb{Z}_2}$

Pour démontrer l'important isomorphisme

$$L_+^\uparrow \simeq \frac{SL(2,\mathbb{C})}{\mathbb{Z}_2} \tag{2.8}$$

où $\mathbb{Z}_2$ est le centre de $SL(2,\mathbb{C})$, on procède comme pour $SU(2)$ et $SO(3)$. On construit d'abord un homomorphisme de groupes

$$f : SL(2,C) \quad \rightarrow \quad L_+^\uparrow.$$

On montre ensuite que cet homomorphisme est surjectif. On montre enfin que son noyau est le centre $\mathbb{Z}_2$.

2.2.1 Construction de l'homomorphisme f

L'espace des matrices 2×2 hermitiennes s'identifie à $\mathbb{R}^4$. En effet, toute matrice hermitienne X peut s'écrire

$$X = \begin{pmatrix} x^0 + x^3 & x^1 - ix^2 \\ x^1 + ix^2 & x^0 - x^3 \end{pmatrix} = x^\mu \sigma_\mu, \quad x^\mu \in \mathbb{R}, \quad \sigma_\mu = (I, \sigma_k).$$

On a $\det X = -\left(-(x^0)^2 + (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2\right)$.

Soit S une matrice de $SL(2,\mathbb{C})$. La transformation

$$X \to X' = SXS^\dagger \tag{2.9}$$

associe à X une matrice hermitienne X' de même déterminant. La correspondance est linéaire en X. Donc, $S \in SL(2,\mathbb{C})$ définit une transformation linéaire de $\mathbb{R}^4$,

$$x^\mu \to x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$$

qui préserve la norme minkowskienne et qui appartient par conséquent au groupe de Lorentz $O(3,1)$. On note f cette application et on écrit $\Lambda = f(S)$.

Il est clair que f est un homomorphisme ($f(S_1S_2) = f(S_1)f(S_2)$) qui se réduit à l'homomorphisme vu précédemment quand $S \in SU(2) \subset SL(2,\mathbb{C})$. Comme $SL(2,C)$ est connexe, son image est contenue dans la composante connexe $L_+^\uparrow$ du groupe de Lorentz $O(3,1)$. f est l'homomorphisme cherché.

Il est clair aussi que f est continu. Introduisant $\bar\sigma_\mu = (I, -\sigma_i)$, on tire en fait de

$$\Lambda^\nu{}_\mu \sigma_\nu = S\sigma_\mu S^\dagger$$

et $Tr(\bar\sigma_\rho\sigma_\nu) = -2\eta_{\rho\nu}$, l'expression explicite

$$\Lambda_{\rho\mu} = -\frac{1}{2} Tr\left(\bar\sigma_\rho S \sigma_\mu S^\dagger\right). \tag{2.10}$$

2.2.2 L'homomorphisme f est surjectif

On sait que toute rotation spatiale possède deux pré-images (qui diffèrent par le signe). Soit $L(\gamma)$ une transformation de Lorentz propre dans la direction x. On définit

$$\begin{aligned} S(\gamma) &= \exp\left(\sigma_1 \frac{\gamma}{2}\right) \\ &= \cosh\frac{\gamma}{2}\, I + \sinh\frac{\gamma}{2}\, \sigma_1 \\ &= S^\dagger. \end{aligned}$$

On a $S(\gamma)^2 = S(2\gamma)$ et $S(\gamma)^{-1} = S(-\gamma)$ ainsi que $\det S(\gamma) = 1$ car $Tr\,\sigma_1 = 0$. Calculons l'image par f de $S(\gamma) \in SL(2,\mathbb{C})$. Utilisant les relations de commutation des matrices de Pauli, on obtient, avec $X = x^\mu\sigma_\mu$,

$$\begin{aligned} SXS^\dagger &= \left(\cosh\frac{\gamma}{2}\, I + \sinh\frac{\gamma}{2}\, \sigma_1\right) x^\mu\sigma_\mu \left(\cosh\frac{\gamma}{2}\, I + \sinh\frac{\gamma}{2}\, \sigma_1\right) \\ &= \left(x^0\, I + x^1\sigma_1\right)\left((\cosh\gamma)\, I + (\sinh\gamma)\,\sigma_1\right) + x^2\sigma_2 + x^3\sigma_3 \\ &= \left(x^0\cosh\gamma + x^1\sinh\gamma\right) I + \left(x^0\sinh\gamma + x^1\cosh\gamma\right)\sigma_1 + x^2\sigma_2 + x^3\sigma_3 \end{aligned}$$

et donc les composantes x'^μ de X' ($X' = x'^\mu \sigma_\mu$) sont données par

$$x'^0 = x^0 \cosh\gamma + x^1 \sinh\gamma, \quad x'^1 = x^0 \sinh\gamma + x^1 \cosh\gamma, \quad x'^2 = x^2, \quad x'^3 = x^3.$$

C'est $L(\gamma)$,

$$L(\gamma) = \begin{pmatrix} \cosh\gamma & \sinh\gamma & 0 & 0 \\ \sinh\gamma & \cosh\gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

la transformation de Lorentz propre dans la direction x de rapidité γ. Les transformations de Lorentz propres dans la direction x sont donc aussi dans Imf.

On utilisant la décomposition standard des éléments de $L_+^\uparrow$, et le fait que f est un homomorphisme, on en conclut que f est surjectif.

2.2.3 Noyau de f

Le noyau de f est constitué des matrices $S \in SL(2, C)$ telles que $X = SXS^\dagger$ pour toute matrice hermitienne. Prenant $X = I$, on voit que $S \in SU(2)$. Prenant ensuite $X = \sigma_i$, on tire que X doit appartenir au centre de $SU(2)$, c'-à-d. $\mathbb{Z}_2$. cqfd.

$L_+^\uparrow$ n'est pas simplement connexe

Il résulte de cet homomorphisme que $L_+^\uparrow$ n'est pas simplement connexe. Il existe deux types de courbes fermées passant par l'identité : celles qui sont contractibles et qui se relèvent sur une courbe fermée de $SL(2,\mathbb{C})$; et celles qui ne sont pas contractibles et qui se relèvent sur une courbe de $SL(2,\mathbb{C})$ partant de I (ou $-I$) et se terminant en $-I$ (ou I). Si on parcourt deux fois une courbe fermée non contractible, on obtient une courbe fermée contractible. Un tour complet (courbe fermée dans $SO(3)$) est une courbe non contractible puisque l'homomorphisme f se réduit à l'homomorphisme $SU(2) \to SO(3)$ étudié cidessus pour $SU(2)$.

2.3 Algèbre de Lie de $L_+^\uparrow$

Base et commutateurs

On obtient l'algèbre de Lie $so(3,1)$ du groupe de Lorentz en différentiant la condition de définition $\Lambda^t \eta \Lambda = \eta$ en l'identité. Ceci donne

$$\omega^t \eta + \eta \omega = 0 \tag{2.11}$$

pour $(d/dt)(\Lambda)|_{t=0} = \omega$. La matrice $\eta\omega$ est antisymétrique. Inversément, si la matrice ω obéit à (2.11), alors $\exp(\omega^t t)\eta = \eta \exp(-\omega t)$ ce qui implique $\exp \omega t \in O(3,1)$ et donc $\exp \omega t \in L_+^\uparrow$ par continuité.

Une base de l'algèbre de Lie $so(3,1)$ est donnée par les 6 matrices $M_{\lambda\mu} = -M_{\mu\lambda}$ dont les éléments de matrices sont égaux à

$$(M_{\lambda\mu})^\alpha{}_\beta = \delta^\alpha_\mu \, \eta_{\lambda\beta} - \delta^\alpha_\lambda \, \eta_{\mu\beta}. \tag{2.12}$$

Explicitement

$$M_{01} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_{02} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$
$$M_{03} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$
$$M_{23} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_{31} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Les commutateurs de ces matrices sont donnés par

$$[M_{\lambda\mu}, M_{\rho\sigma}] = \eta_{\mu\sigma} M_{\lambda\rho} - \eta_{\mu\rho} M_{\lambda\sigma} + \eta_{\lambda\rho} M_{\mu\sigma} - \eta_{\lambda\sigma} M_{\mu\rho}. \tag{2.13}$$

Il est commode de poser

$$\begin{aligned} N_1 &= M_{01}, \quad N_2 = M_{02}, \quad N_3 = M_{03}, \\ M_1 &= M_{23}, \quad M_2 = M_{31}, \quad M_3 = M_{12}. \end{aligned}$$

Les matrices M_i sont les générateurs des rotations spatiales déjà rencontrés ci-dessus (et étendus à 4 dimensions).

En termes de ces nouvelles notations, les relations de commutation prennent la forme

$$[M_i, M_j] = \epsilon_{ijk} M_k, \tag{2.14}$$
$$[M_i, N_j] = \epsilon_{ijk} N_k, \tag{2.15}$$
$$[N_i, N_j] = -\epsilon_{ijk} M_k. \tag{2.16}$$

Décomposition sur les complexes

L'algèbre de Lie du groupe de Lorentz est réelle. Il est intéressant de considérer l'algèbre de Lie complexe $\mathcal{A}$ engendrée par les mêmes générateurs $\{M_i, N_i\}$, mais sur les complexes. Plus précisément, $\mathcal{A}$ est l'espace vectoriel complexe des combinaisons linéaires $\sum_i (a_i M_i + b_i N_i)$, $a_i, b_i \in \mathbb{C}$, muni du commutateur tiré de (2.14), (2.15) et (2.16) par linéarité (sur les complexes).

On vérifie aisément que $\mathcal{A}$ est la somme directe de deux algèbres de Lie qui commutent, $\mathcal{A} = \mathcal{B}_1 \oplus \mathcal{B}_2$, $[\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2] = 0$, où une base de $\mathcal{B}_1$ est donnée par

$$L_i = \frac{1}{2}(M_i + iN_i) \tag{2.17}$$

et une base de $\mathcal{B}_2$ est donnée par

$$\bar{L}_i = \frac{1}{2}(M_i - iN_i). \tag{2.18}$$

On a

$$[L_i, L_j] = \epsilon_{ijk} L_k, \quad [L_i, \bar{L}_j] = 0, \quad [\bar{L}_i, \bar{L}_j] = \epsilon_{ijk} L_k \tag{2.19}$$

c'-à-d. que $\mathcal{A}$ est la somme de deux copies de l'algèbre de Lie $so(3)$. Mais, les générateurs correspondant ne sont pas réels. On passe d'un $so(3)$ à l'autre par conjugaison complexe, ce que l'on écrit $\mathcal{A} = so(3) \oplus \overline{so(3)}$.

Centre de $L_+^\uparrow$

On voit facilement que le centre de $L_+^\uparrow$ est trivial : soit C un élément du centre. C doit commuter avec les générateurs de l'algèbre de Lie, $[C, M_{\lambda\mu}] = 0$. Ceci implique que C est multiple de l'identité, $C = \lambda I$. La condition de déterminant implique $\lambda^4 = 1$ et donc $\lambda = \pm 1$. Le cas $\lambda = -1$ est exclu car ${C^0}_0 > 0$.

2.4 Représentations irréductibles de dimension finie du groupe de Lorentz $L_+^\uparrow$

Pour déterminer les représentations de dimension finie du groupe de Lorentz $L_+^\uparrow$, on cherche d'abord les représentations de dimension finie de son algèbre de Lie $so(3,1) \simeq sl(2,\mathbb{C})$. Les représentations utiles pour la mécanique quantique sont les représentations par des opérateurs linéaires agissant dans des espaces vectoriels *complexes* et nous nous placerons dans ce cadre. Toute représentation complexe T de l'algèbre de Lie $so(3,1)$ fournit une représentation des relations de commutation des $M_{\lambda\mu}$ et donc aussi des M_i et des N_i. En posant

$$T(L_i) = \frac{1}{2}(T(M_i) + iT(N_i)), \quad T(\bar{L}_i) = \frac{1}{2}(T(M_i) - iT(N_i)) \tag{2.20}$$

(ce qui a un sens puisqu'on a une représentation dans un espace vectoriel complexe), on obtient une représentation des relations de commutation des L_i et des $\bar{L}_i$, c'-à-d. une représentation de $so(3) \oplus \overline{so(3)}$. Inversément, étant donnée une représentation de $so(3) \oplus \overline{so(3)}$, on construit une représentation de $so(3,1)$ par les formules,

$$T(M_i) = T(L_i) + T(\bar{L}_i), \quad T(N_i) = i(T(\bar{L}_i) - T(L_i)). \tag{2.21}$$

En outre, si $\bar{T}$ est la représentation complexe conjuguée de la représentation T de $so(3,1)$, on tire de (2.20) que $\bar{T}(L_i) = (1/2)(\bar{T}(M_i)+i\bar{T}(N_i)) = (1/2)((T(M_i))^*+i(T(N_i))^*) = (1/2)(T(M_i) - iT(N_i))^* = T(\bar{L}_i)^*$.

Les représentations irréductibles de dimension finie de $so(3) \oplus \overline{so(3)}$ sont données par $D_j^L \otimes D_{j'}^{\bar{L}}$ où j et j' sont des entiers ou des demi-entiers. On les note (j,j'). Comme les représentations D_j sont équivalentes à leur complexe conjuguée, on a

$$\overline{(j,j')} \sim (j',j) :$$

ces représentations sont complexes, sauf si $j = j'$, auquel cas elles sont réelles.

Par exponentiation des générateurs infinitésimaux, on obtient une représentation de $SL(2,\mathbb{C})$. Celle-ci est aussi une représentation de $L_+^\uparrow$ si $\mathbb{Z}_2$ est représenté trivialement, ce qui nécessite $j + j' \in \mathbb{N}$ (une rotation $\exp 2\pi M_3$ autour de l'axe z est représentée par $\exp 2\pi i(j + j') = 1$ ssi $j + j' \in \mathbb{N}$).

Les représentations (j,j') sont non unitaires. On peut en effet supposer $T(L_i)$ et $T(\bar{L}_i)$ anti-hermitiennes, ce qui entraîne que les matrices représentant la sous-algèbre $so(3)$ de $so(3,1)$ sont anti-hermitiennes (et les exponentielles correspondantes unitaires), mais que par contre les transformations associées aux N_i sont hermitiennes (et leurs exponentielles non unitaires).

2.5 Semi-spineurs de Weyl

La représentation $(1/2,0)$ a pour générateurs infinitésimaux

$$T_{(\frac{1}{2},0)}(L_i) = \frac{-i\sigma_i}{2}, \qquad T_{(\frac{1}{2},0)}(\bar{L}_i) = 0\,, \tag{2.22}$$

et donc

$$T_{(\frac{1}{2},0)}(M_i) = \frac{-i\sigma_i}{2}, \qquad T_{(\frac{1}{2},0)}(N_i) = \frac{-\sigma_i}{2}. \tag{2.23}$$

Ce sont les générateurs de $SL(2,\mathbb{C})$. On a donc

$$T_{(\frac{1}{2},0)}(S) = S \qquad \forall S \in SL(2,\mathbb{C}) \tag{2.24}$$

c-à-d. la représentation identique de $SL(2,\mathbb{C})$. A la transformation de Lorentz $\exp(\alpha^i M_i + \beta^i N_i)$ correspond la matrice

$$e^{(\alpha^i - i\beta^i)\frac{(-i\sigma_i)}{2}} \tag{2.25}$$

(et moins cette matrice), ce qui redonne l'homomorphisme $f : SL(2,C) \to L_+^\uparrow$ entre $SL(2,\mathbb{C})$ et $L_+^\uparrow$ étudiée ci-dessus. En effet, comme on la vu,

$$f\left(e^{(\alpha^i - i\beta^i)\frac{(-i\sigma_i)}{2}}\right) = \exp(\alpha^i M_i + \beta^i N_i)$$

(noter que $\exp(\beta^1 N_1)$ est une transformation de Lorentz propre dans la direction x de rapidité $-\beta^1$).

Les vecteurs de la représentation $T_{(\frac{1}{2},0)}$ s'appellent semi-spineurs de Weyl, gauches ou de première espèce. Si ξ et ξ' sont deux semi-spineurs gauches, alors

$$\xi_\alpha \, \epsilon^{\alpha\beta} \, \xi'_\beta \tag{2.26}$$

$(\alpha, \beta = 1, 2)$ est invariant [1] car les matrices de $SL(2, \mathbb{C})$ ont pour déterminant 1. Cette quantité est égale à $i\xi^t \sigma_2 \xi'$.

La représentation $(0, 1/2)$ est (équivalente à) la représentation complexe conjuguée de $(1/2, 0)$ et on peut prendre pour générateurs

$$T_{(0,\frac{1}{2})}(M_i) = \frac{-i\sigma_i}{2}\,, \qquad T_{(0,\frac{1}{2})}(N_i) = \frac{\sigma_i}{2} \tag{2.27}$$

ce qui donne

$$e^{(\alpha^i + i\beta^i)\frac{(-i\sigma_i)}{2}}$$

pour les matrices des transformations finies. En d'autres termes,

$$T_{(0,\frac{1}{2})}(S) = \sigma_2 S^* \sigma_2 \qquad \forall S \in SL(2, \mathbb{C}), \tag{2.28}$$

la matrice σ_2 apparaissant ici car c'est elle qui réalise l'équivalence entre $D_{\frac{1}{2}}$ et $\bar{D}_{\frac{1}{2}}$. Les vecteurs de la représentation $T_{(0,\frac{1}{2})}$ s'appellent semi-spineurs de Weyl, droits ou de deuxième espèce. Si η et η' sont deux spineurs droits, alors

$$\eta_\alpha \, \epsilon^{\alpha\beta} \, \eta'_\beta = i\eta^t \sigma_2 \eta' \tag{2.29}$$

est un invariant.

En outre, si ξ est un semi-spineur gauche, $\sigma_2 \xi^*$ est un semi-spineur droit et donc $\xi^\dagger \eta$ est invariant pour tout semi-spineur droit η. Il en est de même pour $\eta^\dagger \xi$ car $\sigma_2 \eta^*$ est un semi-spineur gauche.

Par produit tensoriel des représentations $(1/2, 0)$ et $(0, 1/2)$ (et décomposition) on engendre toutes les représentations (j, j'). Un cas intéressant est $(1/2, 0) \otimes (0, 1/2) = (1/2, 1/2)$ qui n'est autre que la représentation vectorielle de $L_+^\uparrow$ d'après l'homomorphisme f construit ci-dessus (voir aussi exercices).

2.6 Représentations de $L^\uparrow$, spineurs de Dirac

L'opérateur P de parité échange aussi L_i et $\bar{L}_i$ car $[P, M_i] = 0$, $PN_i = -N_i P$ et donc

$$PL_i = \bar{L}_i P\,. \tag{2.30}$$

Soit T une représentation de $L^\uparrow$. Elle se décompose en représentations irréductibles de $L_+^\uparrow$, $T \simeq \oplus_{j,j'}(j, j')$. Si v est un vecteur dans le sous-espace invariant associé à (j, j'), alors $T(P)v$ se transforme selon (j', j).

1. On notera que la représentation n'est pas unitaire, et donc l'existence d'une forme invariante antisymétrique n'est pas en contradiction avec les propriétés générales de réalité étudiées ci-dessus.

Si $j \neq j'$, les représentations irréductibles de $L^\uparrow$ s'obtiennent en combinant (j, j') et (j', j),

$$(j, j') \oplus (j', j) \tag{2.31}$$

En choisissant bien les bases respectives $\{e_\alpha\}$ et $\{f_\alpha\}$ des espaces des représentations (j, j') et (j', j), on peut supposer $P(e_\alpha) = f_\alpha$. En particulier, les vecteurs de la représentation $(1/2, 0) \oplus (0, 1/2)$ sont appelés “spineurs de Dirac” et sont obtenus en combinant semi-spineurs de Weyl gauches et droits qui, séparément, ne donnent pas une représentation de la parité.

Si $j = j'$, l'espace de la représentation irréductible (j, j) de $L_+^\uparrow$ est aussi l'espace d'une représentation irréductible de $L^\uparrow$. En fait, l'action de P peut être définie de deux manières inéquivalentes. En effet, pour le sous-groupe $SO(3)$, la représentation (j, j) se décompose comme suit

$$(j, j) = D_{2j} \oplus D_{2j-1} \oplus \cdots \oplus D_0 \,.$$

Les vecteurs de la représentations (j, j) sont les tenseurs symétriques $T_{\mu_1 \cdots \mu_{2j}}$ à $2j$ composantes, de trace nulle,

$$T_{\mu_1 \cdots \mu_{2j}} = T_{(\mu_1 \cdots \mu_{2j})}, \quad T_{\mu_1 \cdots \mu_{2j}} \eta^{\mu_1 \mu_2} = 0$$

(exercice). Ici, $\mu_k = 0, 1, 2, 3$. La composante scalaire est $T_{00 \cdots 0}$, les composantes vectorielles (se transformant sous D_1) contiennent un seul indice spatial etc. On sait que $P = \pm I$ sur chacun des espaces invariants associés aux représentations irréductibles D_k. Dès qu'on a choisit le signe de P pour la représentation scalaire D_0, le signe de P est déterminé pour les autres représentations car N_i mélange les représentations. Plus précisément, si v se transforme selon D_0 ($M_s v = 0$), alors les vecteurs $v_k = N_k v$ se transforment selon D_1 :

$$\delta_s v_k = M_s v_k = M_s N_k v = [M_s, N_k] v = \epsilon_{skl} v_l .$$

Par conséquent, si $P = \pm I$ sur D_0, alors $P = \mp$ sur D_1 car $P N_k v = -N_k P v = \mp N_k v$. Et ainsi de suite : les signes alternent. Si $P = I$ sur D_0 on parle de *tenseur* tandis que si $P = -I$ sur D_0, on parle de *pseudo-tenseur*.

Chapitre 3

Représentations du groupe de Poincaré

On décrit dans ce chapitre les représentations unitaires irréductibles de masse carrée ≥ 0 du groupe de Poincaré. Celles-ci sont de dimension infinie. Nous ne nous attacherons qu'aux aspects algébriques sans entrer dans les problèmes d'analyse fonctionnelle qui apparaissent.

3.1 Structure du groupe de Poincaré -Invariants

3.1.1 Généralités

Le groupe de Poincaré $\mathcal{P}$ (ou groupe de Lorentz inhomogène) est le groupe des transformations de l'espace-temps qui préservent la distance minkowskienne $\Delta s^2 = \eta_{\mu\nu}\Delta x^\mu \Delta x^\nu$. Explicitement,une transformation de Poincaré a la forme

$$x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu + a^\mu, \tag{3.1}$$

où Λ est une transformation de Lorentz. On obtient $\mathcal{P}$ en ajoutant les translations au groupe de Lorentz. On note la transformation (3.1) (Λ, a) ; la loi de groupe est

$$(\Lambda_1, a_1)(\Lambda_2, a_2) = (\Lambda_1\Lambda_2, a_1 + \Lambda_1 a_2). \tag{3.2}$$

Une représentation à 5 dimensions du groupe de Poincaré est obtenue en considérant les vecteurs à 5 composantes

$$\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}.$$

La transformation de Poincaré (3.1) est reproduite par

$$\begin{pmatrix} x' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Lambda & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}$$

et on vérifie facilement que le produit des matrices

$$\begin{pmatrix} \Lambda & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

reproduit le produit du groupe de Poincaré.

Le sous-groupe abélien T_4 des translations est un sous-groupe normal. Le groupe quotient est isomorphe au groupe de Lorentz.

On considérera par la suite le sous-groupe $\mathcal{P}_+^\uparrow$ de $\mathcal{P}$ tel que $\Lambda \in L_+^\uparrow$.

3.1.2 Algèbre de Lie

Une base de l'algèbre de Lie du groupe de Poincaré s'obtient en ajoutant aux 6 générateurs $M_{\lambda\mu}$ des transformations de Lorentz les 4 générateurs P_μ des translations, donnés dans la représentation à 5 dimensions construite ci-dessus par

$$P_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.3}$$

$$P_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.4}$$

Les commutateurs sont donnés par

$$[P_\mu, P_\nu] = 0, \tag{3.5}$$

$$[M_{\rho\sigma}, P_\mu] = \eta_{\mu\rho} P_\sigma - \eta_{\mu\sigma} P_\rho \tag{3.6}$$

$$[M_{\lambda\mu}, M_{\rho\sigma}] = \eta_{\mu\sigma} M_{\lambda\rho} - \eta_{\mu\rho} M_{\lambda\sigma} + \eta_{\lambda\rho} M_{\mu\sigma} - \eta_{\lambda\sigma} M_{\mu\rho}. \tag{3.7}$$

3.1.3 Invariants

On vérifie aisément, en utilisant uniquement les relations de commutation, que la *masse carrée*

$$M^2 = -P_\mu P^\mu \tag{3.8}$$

et le carré du *vecteur de Pauli-Lubanski*

$$W^\mu = \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} P_\nu M_{\rho\sigma}\,, \quad W^2 = W_\mu W^\mu\,, \tag{3.9}$$

commutent avec tous les générateurs du groupe de Poincaré,

$$[M^2, P_\mu] = 0\,, \quad [M^2, M_{\rho\sigma}] = 0\,, \quad [W^2, P_\mu] = 0\,, \quad [W^2, M_{\rho\sigma}] = 0\,. \tag{3.10}$$

Dans toute représentation irréductible du groupe de Poincaré, ces opérateurs sont multiples de l'identité.

3.1.4 Le groupe $\bar{\mathcal{P}}_+^\uparrow$

On appelle groupe $\bar{\mathcal{P}}_+^\uparrow$ ("recouvrement universel de $\mathcal{P}_+^\uparrow$") le groupe dont les éléments sont les paires (S,a) où $S \in SL(2,\mathbb{C})$ et a est comme ci-dessus une translation d'espace-temps. La loi de groupe est donnée par

$$(S_1,a_1)(S_2,a_2) = (S_1S_2, a_1 + f(S_1)a_2) \tag{3.11}$$

où f est l'homomorphisme $f : SL(2,C) \to L_+^\uparrow$ étudié ci-dessus. On vérifie que ce produit définit bien un groupe. Le groupe $\bar{\mathcal{P}}_+^\uparrow$ est connexe et simplement connexe.

On peut étendre l'homomorphisme $f : SL(2,C) \to L_+^\uparrow$ à un homomorphisme $f : \bar{\mathcal{P}}_+^\uparrow \to \mathcal{P}_+^\uparrow$ défini comme suit :

$$f(S,a) = (f(S),a). \tag{3.12}$$

Cet homomorphisme est surjectif et de noyau $\mathbb{Z}_2$. Par conséquent

$$\frac{\bar{\mathcal{P}}_+^\uparrow}{\mathbb{Z}_2} \simeq \mathcal{P}_+^\uparrow \tag{3.13}$$

d'où on tire que $\mathcal{P}_+^\uparrow$ a les mêmes propriétés de connexité que $L_+^\uparrow$ et $SO(3)$.

3.2 Représentations irréductibles du groupe des translations

Si T est une représentation irréductible du groupe des translations T_4, alors T est à une dimension. Si e est un vecteur de cet espace, on a

$$T(a)\, e = e^{i\delta(a)}\, e \tag{3.14}$$

où le nombre $\delta(a)$ est réel car nous supposons la représentation unitaire.

La fonction δ est linéaire. En effet, de $T(a+b) = T(a)T(b)$ (représentation) on tire $\delta(a+b) = \delta(a)+\delta(b)$. Ceci implique $\delta(\lambda a) = \lambda\delta(a)\ \ \forall\lambda \in \mathbb{R}$ car la fonction $\Phi(\lambda) \equiv \delta(\lambda a)$ a une dérivée constante, $\Phi'(\lambda) = \lim_{\epsilon\to 0}[\delta((\lambda+\epsilon)a) - \delta(\lambda a)]/\epsilon = \lim_{\epsilon\to 0}(\delta(\epsilon a))/\epsilon = \Phi'(0)$ $(\delta(0) = 0)$. Donc $\Phi(\lambda)$ est linéaire en λ pour tout vecteur a et $\delta(\lambda a + \mu b) = \lambda\delta(a) + \mu\delta(b)$.

Il en résulte que toute représentation unitaire irréductible T de T_4 est entièrement caractérisée par un vecteur k^μ tel que

$$T(a) = e^{ia^\mu k_\mu} = e^{ia\cdot k} \tag{3.15}$$

avec $a \cdot k = \eta_{\mu\nu}a^\mu k^\nu$.

Les opérateurs des translations sont évidemment diagonaux et les composantes k_μ sont les valeurs propres des composantes P_μ de la quadri-impulsion (conformément aux conventions des physiciens, on redéfinit les générateurs en les multipliant par i de manière à ce qu'ils soient hermitiens).

3.3 Petit groupe

3.3.1 Action des translations

Considérons une représentation irréductible unitaire T du groupe de Poincaré $\mathcal{P}_+^\uparrow$. Si on se restreint au sous-groupe des translations, cette représentation se décompose en somme directe de représentations à une dimension de T_4. Considérons un de ces sous-espaces invariants correspondant au vecteur $k^\mu_{(0)}$ et noté $\{\mathbb{C}\psi(k_{(0)},\sigma)\}$, pour lequel on a donc

$$T(a)\,\psi(k_{(0)},\sigma) = e^{ik_{(0)}\cdot a}\psi(k_{(0)},\sigma). \tag{3.16}$$

Ici, σ représente les indices supplémentaires éventuellement nécessaires si la représentation caractérisée par le vecteur $k_{(0)}$ est dégénérée. Appliquons l'opérateur $T(\Lambda)$ qui représente la transformation de Lorentz homogène $(\Lambda, 0)$. Puisque $(\Lambda,0)(I,a) = (\Lambda,\Lambda a) = (I,\Lambda a)(\Lambda,0)$, on a

$$\begin{aligned} T(\Lambda)T(a)\psi(k_{(0)},\sigma) &= e^{ik_{(0)}\cdot a}\left(T(\Lambda)\psi(k_{(0)},\sigma)\right) && (3.17)\\ &= T(\Lambda a)\left(T(\Lambda)\psi(k_{(0)},\sigma)\right). && (3.18)\end{aligned}$$

Il en résulte, en remplaçant a par $\Lambda^{-1}a$,

$$\begin{aligned} T(a)\left(T(\Lambda)\psi(k_{(0)},\sigma)\right) &= e^{ik_{(0)}\cdot\Lambda^{-1}a}\left(T(\Lambda)\psi(k_{(0)},\sigma)\right) && (3.19)\\ &= e^{i\Lambda k_{(0)}\cdot a}\left(T(\Lambda)\psi(k_{(0)},\sigma)\right). && (3.20)\end{aligned}$$

Le vecteur $T(\Lambda)\psi(k_{(0)},\sigma)$ (de l'espace de la représentation irréductible T) se transforme pour le groupe des translations selon la représentation caractérisée par le vecteur $\Lambda k_{(0)}$ (d'espace-temps).

3.3.2 Action du petit groupe

Comme tout vecteur de même norme carrée minkowskienne que $k_{(0)}$ (et de même orientation temporelle si $k_{(0)}$ est de genre temps ou lumière) peut être envoyé sur $k_{(0)}$ par une transformation de $L_+^\uparrow$, on en conclut que si T contient la représentation du groupe des translations d'impulsion $k_{(0)}$, elle contient aussi les représentations d'impulsion $k'_{(0)}$ où $k'_{(0)}$ est un vecteur quelconque de même norme (et de même orientation temporelle si $k_{(0)}\cdot k_{(0)} \leq 0$) que $k_{(0)}$. Si la représentation est irréductible, elle n'en contient pas d'autre car l'opérateur $M^2 = -P^\mu P_\mu$ est multiple de l'identité, ce multiple étant $-k_{(0)}\cdot k_{(0)}$.

On appelle "petit groupe" $L_{k_{(0)}}$ associé au vecteur $k_{(0)}$ le sous-groupe du groupe $L_+^\uparrow$ qui laisse $k_{(0)}$ invariant,

$$\Lambda \in L_{k_{(0)}} \quad \Leftrightarrow \quad \Lambda k_{(0)} = k_{(0)}. \tag{3.21}$$

On voit d'après (3.20) que si $\Lambda \in L_{k_{(0)}}$, alors le vecteur $T(\Lambda)\psi(k_{(0)},\sigma)$ se transforme pour les translations avec la même quadri-impulsion $k_{(0)}$. Autrement dit, les vecteurs $\psi(k_{(0)},\sigma)$ (pour $k_{(0)}$ fixé et pour toutes valeurs de l'indice supplémentaire σ) constitutent une base de l'espace d'une représentation du petit groupe $L_{k_{(0)}}$.

Soit k est un vecteur d'espace-temps de même norme carrée que $k_{(0)}$ (et de même orientation temporelle si $k_{(0)} \cdot k_{(0)} \leq 0$)). Il existe (au moins) une transformation de Lorentz Λ telle que

$$\Lambda k_{(0)} = k.$$

Pour tout k, on choisit une telle transformation et on la note Λ_k. Définissons

$$\psi(k, \sigma) = T(\Lambda_k)\psi(k_{(0)}, \sigma). \tag{3.22}$$

Les $\psi(k, \sigma)$ forment une base du sous-espace invariant sous l'action de T_4 associé à la quadri-impulsion k^μ. Ce sous-espace est l'espace d'une représentation du petit groupe L_k de k.

L'espace engendré par tous les $\psi(k, \sigma)$ (quand la quadri-impulsion k parcourt l'ensemble de tous les vecteurs de même norme carrée que $k_{(0)}$ – et de même orientation temporelle si $k_{(0)} \cdot k_{(0)} \leq 0$)) est invariant. C'est donc l'espace de la représentation. En effet, considérons une transformation $(\Lambda, a) = (I, a)(\Lambda, 0)$ de $\mathcal{P}_+^\uparrow$ quelconque. Pour déterminer son action sur $\psi(k, \sigma)$, il suffit de déterminer l'action de $T(\Lambda)$ puisqu'on sait comment agissent les translations. A cet effet, on note que si Λ envoie k sur k', alors $\Lambda_{k'}^{-1}\Lambda\Lambda_k$ appartient au petit groupe $L_{k_{(0)}}$ et donc il existe une transformation $\Lambda_0 \in L_{k_{(0)}}$ telle que

$$\Lambda = \Lambda_{k'}\Lambda_0\Lambda_k^{-1}. \tag{3.23}$$

D'autre part,

$$T(\Lambda_0)\psi(k_{(0)}, \sigma) = \sum_{\sigma'} \psi(k_{(0)}, \sigma')[D(\Lambda_0)]_{\sigma'\sigma} \tag{3.24}$$

où les $[D(\Lambda_0)]_{\sigma'\sigma}$ sont les éléments de matrice des opérateurs de la représentation du petit groupe. Par conséquent,

$$\begin{aligned} T(\Lambda)\psi(k, \sigma) &= T(\Lambda_{k'})T(\Lambda_0)T(\Lambda_k^{-1})\psi(k, \sigma) && (3.25)\\ &= T(\Lambda_{k'})T(\Lambda_0)\psi(k_{(0)}, \sigma) && (3.26)\\ &= T(\Lambda_{k'})\sum_{\sigma'} \psi(k_{(0)}, \sigma')[D(\Lambda_0)]_{\sigma'\sigma} && (3.27)\\ &= \sum_{\sigma'} \psi(k', \sigma')[D(\Lambda_0)]_{\sigma'\sigma}. && (3.28) \end{aligned}$$

Ceci montre bien que le sous-espace engendré par les $\psi(k, \sigma)$ est invariant. On voit en outre que dès qu'on connaît l'action du petit groupe sur les $\psi(k_{(0)}, \sigma)$, on connaît l'action de tout opérateur de la représentation. Enfin, la représentation T du groupe de Poincaré $\mathcal{P}_+^\uparrow$ est irréductible ssi la représentation du petit groupe l'est.

3.3.3 Construire les représentations du groupe de Poincaré à partir des représentations du petit groupe

Inversément, donnons-nous un vecteur $k_{(0)}$ et une représentation irréductible du petit groupe $L_{k_{(0)}}$, les vecteurs d'une base de l'espace de cette représentation étant notés $\psi(k_{(0)}, \sigma)$. On construit une représentation du groupe $\mathcal{P}_+^\uparrow$ dans l'espace engendré par les $\psi(k, \sigma)$ où k^μ est un vecteur de même norme carrée que $k^\mu_{(0)}$ (et de même orientation temporelle si $k_{(0)} \cdot k_{(0)} \leq 0$)) de la manière suivante :

$$T((\Lambda, a))\psi(k, \sigma) = e^{ik' \cdot a} \sum_{\sigma'} \psi(k', \sigma')[D(\Lambda_0)]_{\sigma' \sigma} \tag{3.29}$$

($\Lambda k = k'$, $\Lambda = \Lambda_k \Lambda_{(0)}$). Nous devons vérifier que c'est bien une représentation, c-à-d. que

$$T((\Lambda_1, a_1))T((\Lambda_2, a_2)) = T((\Lambda_1 \Lambda_2, a_1 + \Lambda_1 a_2)).$$

Dans les notations de ci-dessus, si Λ_2 envoie k sur k' et Λ_1 envoie k' sur k'', alors $\Lambda_1 \Lambda_2$ envoie k sur k'' et on a

$$\Lambda_2 = \Lambda_{k'} \Lambda_{0,2} \Lambda_k^{-1} \tag{3.30}$$

$$\Lambda_1 = \Lambda_{k''} \Lambda_{0,1} \Lambda_k'^{-1} \tag{3.31}$$

$$\Lambda_1 \Lambda_2 = \Lambda_{k''} \Lambda_{0,12} \Lambda_k^{-1} \tag{3.32}$$

ce qui montre que la transformation du petit groupe $\Lambda_{0,12}$ associée au produit $\Lambda_1 \Lambda_2$ n'est autre que le produit

$$\Lambda_{0,12} = \Lambda_{0,1} \Lambda_{0,2} \tag{3.33}$$

des transformations du petit groupe $\Lambda_{0,1}$ et $\Lambda_{0,2}$. Il vient ensuite

$$T((\Lambda_2, a_2))\psi(k, \sigma) = e^{ik' \cdot a_2} \sum_{\sigma'} \psi(k', \sigma')[D(\Lambda_{0,2})]_{\sigma' \sigma}, \tag{3.34}$$

$$= e^{i\Lambda_1^{-1} k'' \cdot a_2} \sum_{\sigma'} \psi(k', \sigma')[D(\Lambda_{0,2})]_{\sigma' \sigma}, \tag{3.35}$$

$$= e^{ik'' \cdot \Lambda_1 a_2} \sum_{\sigma'} \psi(k', \sigma')[D(\Lambda_{0,2})]_{\sigma' \sigma}, \tag{3.36}$$

$$T((\Lambda_1, a_1))\psi(k', \sigma') = e^{ik'' \cdot a_1} \sum_{\sigma''} \psi(k'', \sigma'')[D(\Lambda_{0,1})]_{\sigma'' \sigma'}. \tag{3.37}$$

De là

$$\begin{aligned} &T((\Lambda_1, a_1))T((\Lambda_2, a_2))\psi(k, \sigma) \\ &\quad = e^{ik'' \cdot (a_1 + \Lambda_1 a_2)} \sum_{\sigma', \sigma''} \psi(k'', \sigma'')[D(\Lambda_{0,1})]_{\sigma'' \sigma'} [D(\Lambda_{0,2})]_{\sigma' \sigma} \\ &\quad = e^{ik'' \cdot (a_1 + \Lambda_1 a_2)} \sum_{\sigma''} \psi(k'', \sigma'')[D(\Lambda_{0,12})]_{\sigma'' \sigma} \end{aligned} \tag{3.38}$$

car on a une représentation du petit groupe. Mais ceci n'est autre que l'action de $T((\Lambda_1\Lambda_2, a_1 + \Lambda_1 a_2))$ sur $\psi(k,\sigma)$, cqfd.

En conclusion : une représentation irréductible du groupe $\mathcal{P}_+^\uparrow$ est complètement caractérisée par M^2 (c'-à-d. moins la norme carrée de la quadri-impulsion) et par une représentation irréductible du petit groupe (caractérisée, comme nous le verrons, par l'invariant de Pauli-Lubanski).

La nature du petit groupe dépend du signe de M^2. Nous ne considérerons ici que les cas d'intérêt physique direct $M^2 \geq 0$.

3.4 Représentations irréductibles de masse > 0

Si $P_\mu P^\mu < 0$, le petit groupe est isomorphe à $SO(3)$. En effet, on peut alors supposer $k^\mu_{(0)} = (M, 0, 0, 0)$ en effectuant une transformation de Lorentz appropriée si nécessaire. Le sous-groupe de $L_+^\uparrow$ qui préserve $(M, 0, 0, 0)$ est clairement $SO(3)$. Les représentations de $SO(3)$ ont été étudiées ci-dessus et sont caractérisées par le spin, qui peut être un entier ou un demi-entier non négatif. Dans le cas où le spin est demi-entier, on a une représentation de $\bar{\mathcal{P}}_+^\uparrow$.

Les représentations de $\mathcal{P}_+^\uparrow$ correspondant aux particules de masse non nulle sont donc caractérisées par leur masse et par leur spin. L'information sur le spin est contenue dans le vecteur de Pauli-Lubanski car on a, pour un état tel que $k^\mu_{(0)} = (M, 0, 0, 0)$,

$$W^\lambda = M(0, \varepsilon^{\ell ij} M_{ij}). \tag{3.39}$$

3.5 Représentations irréductibles de masse nulle

Si $P_\mu P^\mu = 0$, le petit groupe est isomorphe à $ISO(2)$. On peut en effet supposer $k^\mu_{(0)} = (1, 0, 0, 1)$. Les transformations de Lorentz infinitésimales qui laissent ce vecteur invariant sont

$$M_{12}, \;\; T_1 \equiv M_{01} + M_{31}, \;\; T_2 \equiv M_{02} - M_{23}\,. \tag{3.40}$$

L'algèbre de ces transformations est

$$[T_1, T_2] = 0, \;\; [M_{12}, T_1] = T_2, \;\; [M_{12}, T_2] = -T_1 \tag{3.41}$$

qui est bien l'algèbre du groupe inhomogène euclidien $ISO(2)$. Un élément de $ISO(2)$ est donné par (R, b), où R est une rotation du plan et b une translation du plan. La loi de groupe est $(R_1, b_1)(R_2, b_2) = (R_1 R_2, b_1 + R_1 b_2)$.

Le sous-groupe abélien engendré par T_1 et T_2 est normal. A toute représentation T de $SO(2)$, on peut associer une représentation $\bar{T}$ de $ISO(2)$ par la formule $\bar{T}((R, b)) = T(R)$. Ce sont ces représentations de $ISO(2)$ qui apparaissent dans la description des particules de masse nulle. Le petit groupe est donc effectivement $SO(2)$ puisque les translations T_1 et T_2 sont représentées de manière triviale.

Les représentations de $SO(2) \simeq U(1)$ ont été étudiées en (1.65). Elles sont caractérisées par un entier $\in \mathbb{Z}$. Cet entier s'appelle l'hélicité. Si on autorise des représentations au signe près (c'-à-d. des représentations du double recouvrement de $SO(2)$, qui est le sous-groupe de $SU(2)$ qui est envoyé sur $SO(2)$ par l'homomorphisme $f : SU(2) \to SO(3)$), l'hélicité peut être demi-entière. On a alors une représentation de $\bar{\mathcal{P}}_+^\uparrow$.