

MA1

Représentations des groupes et applications à la
physique

Marc Henneaux

**CES NOTES SONT INACHEVEES ET ENCORE
A L'ETAT DE BROUILLON**

Table des matières

Chapitre 1 : Quelques notions complémentaires sur les groupes

- 1.1 Translations à gauche et à droite sur un groupe
- 1.2 Classes d'éléments conjugués
- 1.3 Intégration invariante sur un groupe de Lie
- 1.4 Réductibilité complète des représentations de dimension finie des groupes finis et des groupes de Lie compacts

Chapitre 2 : Représentations des groupes finis

- 2.1 Représentation régulière
- 2.2 Relations d'orthogonalité
- 2.3 Caractères des représentations irréductibles
- 2.4 Exemple : Représentations irréductibles du groupe S_3
- 2.5 Application : Calcul des modes de vibration d'un système possédant des symétries

Chapitre 3 : Groupes cristallographiques ponctuels

- 3.1 Généralités sur le groupe Euclidien $IO(n)$
- 3.2 Sous-groupes finis de $O(2)$
- 3.3 Groupes cristallographiques ponctuels à trois dimensions

Chapitre 4 : Opérateurs tensoriels irréductibles

- 4.1 Opérateurs d'entrelacement et représentations complètement réductibles
- 4.2 Coefficients de Clebsch-Gordan
- 4.3 Opérateurs tensoriels irréductibles : définition
- 4.4 Théorème de Wigner-Eckart
- 4.5 Application : Emission électromagnétique et règles de sélection

Chapitre 5 : Représentations des algèbres de Lie compactes

- 5.1 Définitions
- 5.2 Sous-algèbres de Cartan – Poids d'une représentation
- 5.3 Représentation adjointe - Racines
- 5.4 Chaînes de racines
- 5.5 Exemple : $su(3)$
- 5.6 Racines simples, diagramme de Dynkin, matrice de Cartan
- 5.7 Construction de l'algèbre à partir des racines simples
- 5.8 Poids fondamentaux

Chapitre 6 : Représentations de $su(3)$

- 6.1 Les représentations (m, n)
- 6.2 Méthodes tensorielles
- 6.3 Les poids de la représentation (m, n)

6.4 Théorème de Wigner-Eckart pour $su(3)$

Chapitre 7 : Isospin - Hypercharge -Etrangeté

7.1 Isospin - Etrangeté

7.2 “The eight-fold way”

7.3 La formule de masse de Gell-Mann Okubo

Chapitre 8 : Théorèmes de classification

8.1 Système de racines

8.2 Liste

8.3 Les algèbres de Lie classiques

Chapitre 1

Quelques notions complémentaires sur les groupes

1.1 Translations à gauche et à droite

1.1.1 Espaces à groupe de transformations

Définitions

Soit X un ensemble et G un groupe. On dit que le couple (X, G) est un espace X à groupe de transformations G si $\forall g \in G$ est définie une bijection $T_g : X \rightarrow X$ de telle manière que les T_g forment un groupe isomorphe à G ($T_{g_1 g_2} = T_{g_1} T_{g_2}$). L'action des T_g ne doit pas être nécessairement linéaire. On dit aussi que G opère sur X et on utilise parfois la notation g pour T_g (on ne fait pas la distinction entre g et T_g dans les notations). Les éléments de G sont appelés "points".

Orbites : chaque ensemble $O_x = \{g(x), g \in G\}$, où x est fixe, est appelé orbite de x par G .

Théorème : les orbites forment une partition de X .

En effet :

- Chaque point appartient à son orbite, celles-ci ne sont donc pas vides.
- Si deux orbites ont un point commun, elles coïncident, $y \in O_{x_1}$, $y \in O_{x_2} \Rightarrow O_{x_1} = O_{x_2}$. Car on tire de $y = g_1(x_1)$ et $y = g_2(x_2)$ que $x_2 = g_2^{-1} g_1(x_1)$. De là il vient que si $z \in O_{x_2}$ alors $z = g(x_2) = g g_2^{-1} g_1(x_1) \in O_{x_1}$ ce qui implique $O_{x_2} \subset O_{x_1}$. On montre de la même manière que $O_{x_1} \subset O_{x_2}$ et donc $O_{x_1} = O_{x_2}$.

On dit que le groupe opère transitivement sur l'espace X , et que X est homogène ssi X se réduit à une seule orbite ($\forall x_1, x_2 \in X$, il existe (au moins)

un $g \in G$ tel que $x_2 = g(x_1)$.

Sous-groupe de stabilité (ou d'isotropie) d'un point :

Soit $x \in X$. On appelle sous-groupe de stabilité (ou d'isotropie) G_x de x le sous-ensemble de G qui laisse x fixe :

$$g \in G_x \Leftrightarrow g(x) = x.$$

G_x est évidemment un sous-groupe de G (appelé encore sous-groupe stationnaire de x). On dit que G est simplement transitif ssi (i) X est homogène ; (ii) $G_x = \{e\} \forall x \in X$.

1.1.2 Translations à gauche - L'espace (G, G)

Le groupe G agit naturellement sur lui-même. A chaque élément $h \in G$, on peut associer la transformation inversible

$$L_h : G \rightarrow G \quad g \mapsto L_h(g) = hg$$

appelée translation à gauche par h . De $L_{h_1 h_2}(g) = h_1 h_2 g = L_{h_1}(L_{h_2}(g))$, $L_e =$ transformation identique et $(L_h)^{-1} = L_{h^{-1}}$, on déduit que l'ensemble $\{L_h\}$ est un groupe et que l'application $h \mapsto L_h$ est un homomorphisme. Cet homomorphisme est évidemment surjectif et injectif (si $L_h =$ transformation identique, alors $hg = g \forall g$ c-à-d $h = e$). Par conséquent, la correspondance $h \mapsto L_h$ est un isomorphisme. On a démontré :

Théorème : Tout groupe G est isomorphe au groupe des translations à gauche sur G .

L'espace G est évidemment homogène pour les translations à gauche et le groupe G agit sur lui même de manière simplement transitive :

$$\forall g_1, g_2 \in G \quad \exists h \in G : L_h g_1 = g_2$$

(h est donné par $g_2 g_1^{-1}$ - transitivité) et

$$L_h g = g \Rightarrow hg = g \Rightarrow h = e$$

(groupe de stabilité de n'importe quel point = $\{e\}$).

1.1.3 Translations à droite

On définit également les translations à droite de G par la formule :

$$R_h(g) = gh.$$

On a $R_{h_1 h_2}(g) = g(h_1 h_2) = (gh_1)h_2 = R_{h_2}(R_{h_1}(g))$ et donc $R_{h_1 h_2} = R_{h_2} R_{h_1}$. Soit

$$\bar{R}_h \equiv R_{h^{-1}}.$$

On a $\bar{R}_{h_1 h_2} = R_{(h_1 h_2)^{-1}} = R_{(h_2)^{-1} (h_1)^{-1}} = R_{(h_1)^{-1}} R_{(h_2)^{-1}} = \bar{R}_{h_1} \bar{R}_{h_2}$ et par conséquent, l'application $h \mapsto \bar{R}_h$ définit un homomorphisme de G dans le groupe des translations à droite "barres", qui est en fait un isomorphisme.

Il en résulte que G agit aussi à droite sur lui-même. Comme les translations à gauche commutent avec les translations à droite,

$$L_{h_1} R_{h_2} = R_{h_2} L_{h_1}$$

(car $L_{h_1}(R_{h_2}(g)) = L_{h_1}(gh_2) = h_1(gh_2) = (h_1g)h_2 = R_{h_2}(h_1g) = R_{h_2}(L_{h_1}(g))$), on a en fait une action de $G \times G$ sur G . Le sous-groupe de stabilité de l'identité est donné par le "sous-groupe diagonal" $\{(g, g)\}$ de $G \times G$. En effet

$$(g_1, g_2)e = e \Leftrightarrow g_1 e g_2^{-1} = e \Leftrightarrow g_1 = g_2.$$

Le sous-groupe diagonal est isomorphe à G .

Une application directe des considérations précédentes conduit au théorème de Cayley.

Théorème de Cayley : tout groupe fini G d'ordre n est isomorphe à un sous-groupe du groupe symétrique S_n .

En effet, G est isomorphe au groupe des translations à gauche de G par G . Or, toute translation à gauche est une permutation des n éléments de G , donc G est isomorphe à un sous-groupe de S_n .

Le groupe symétrique S_n joue donc un rôle tout particulier dans l'étude des groupes finis. On voit également que le nombre de groupes finis d'ordre n distincts (à un isomorphisme près) est *fini* puisque le nombre de sous-ensembles à n éléments de l'ensemble fini (à $n!$ éléments) S_n est fini.

1.2 Classes de conjugaison

1.2.1 Automorphismes internes

On note Aut_G le groupe des automorphismes de G . L'application bijective $f : G \rightarrow G$ appartient à Aut_G ssi $f(g_1 g_2) = f(g_1) f(g_2)$ (pour tous $g_1, g_2 \in G$).

Soit $h \in G$. On lui associe un automorphisme f_h par la formule :

$$g \mapsto f_h(g) = h g h^{-1}.$$

C'est bien un automorphisme car $f_h(g_1 g_2) = h(g_1 g_2)h^{-1} = (h g_1 h^{-1})(h g_2 h^{-1}) = f_h(g_1) f_h(g_2)$. Un tel automorphisme est appelé *automorphisme interne*. On vérifie aisément que les automorphismes internes forment un groupe; celui-ci est noté Int_G .

Théorème : Int_G est un sous-groupe normal de Aut_G .

Démonstration : soit $a \in \text{Aut}_G$ et $f_h \in \text{Int}_G$. Calculons $a f_h a^{-1}$. On a : $(a f_h a^{-1})(g) = a(f_h(a^{-1}(g))) = a(h a^{-1}(g) h^{-1}) = a(h) g a(h^{-1}) = a(h) g (a(h))^{-1} = f_{a(h)}(g)$. Donc $a f_h a^{-1} = f_{a(h)} \in \text{Int}_G$, ce qui démontre le théorème.

Les espaces (G, Aut_G) et (G, Int_G) sont évidemment des espaces à groupes de transformations.

Théorème : L'application $f : G \rightarrow \text{Int}_G$ qui associe à $h \in G$ l'automorphisme interne f_h correspondant est un homomorphisme de noyau égal à Z_G .

Démonstration :

- (i) $f_{h_1 h_2} = f_{h_1} f_{h_2}$ car $f_{h_1 h_2}(g) = h_1 h_2 g h_2^{-1} h_1^{-1} = h_1 f_{h_2}(g) h_1^{-1} = f_{h_1}(f_{h_2}(g))$.
(ii) $f_h =$ transformation identique $\Leftrightarrow f_h(g) = g$ (pour tout $g \in G$) $\Leftrightarrow h g h^{-1} = g \Leftrightarrow h g = g h$ (pour tout $g \in G$) $\Leftrightarrow h \in Z_G$.

1.2.2 Classes d'éléments conjugués (ou classes de conjugaison)

Les classes de conjugaison (ou classes d'éléments conjugués) sont par définition les orbites de Int_G dans G . Deux éléments dans la même classe sont dits "conjugués". Si g_1 et g_2 sont conjugués, on a

$$g_2 = h g_1 h^{-1}$$

pour un certain $h \in G$.

Le nombre d'éléments d'une classe de conjugaison dépend en général de la classe considérée. La classe de l'identité se réduit à l'identité et contient donc un seul élément. Les autres classes ne sont des singletons que si le groupe est abélien (classe de $g = \{g\}$ ssi $g = h g h^{-1}$ ($\forall h \in G$) $\Leftrightarrow g h = h g$ ($\forall h \in G$) $\Leftrightarrow g \in Z_G$.)

Classes de conjugaison de S_n

Toute permutation se décompose en produit de cycles disjoints. Deux permutations sont conjuguées dans S_n ssi elles ont la même structure de cycles, c-à-d. le même nombre n_k de cycles de longueur k pour tout entier $k \geq 1$.

Ainsi, dans S_3 , les classes de conjugaisons sont $\{e\}$ (trois cycles de longueur 1), $\{(12), (13), (32)\}$ (transpositions, un cycle de longueur 2 et un cycle de longueur 1) et $\{(123), (132)\}$ (permutations cycliques, un cycle de longueur 3).

Le nombre de permutations de S_n ayant α_j cycles de longueur j (avec $n = \sum_{j=1}^n j \alpha_j$),

$$\underbrace{(\times)(\times) \cdots (\times)}_{\alpha_1} \underbrace{(\times \times) \cdots (\times \times)}_{\alpha_2} \underbrace{(\times \times \times) \cdots (\times \times \times)}_{\alpha_3} \cdots$$

est égal à $n!$ (nombre de manières de remplacer les \times par des nombres pris de 1 à n) divisé par $(\alpha_1!)(\alpha_2!) \cdots (\alpha_n!)$ (redondance liée aux permutations des cycles de même longueur entre eux) et par $1^{\alpha_1} 2^{\alpha_2} 3^{\alpha_3} \cdots$ (un cycle de longueur i peut être décrit de i manières différentes correspondants aux différentes manières de commencer le cycle). La classe de conjugaison décrite par cette structure de cycles a donc

$$\frac{n!}{\left(\prod_{i=1}^n \alpha_i!\right) \left(\prod_{i=1}^n i^{\alpha_i}\right)}$$

éléments.

Théorème : Soit G un groupe fini d'ordre n , a un élément de G et C_a sa classe de conjugaison,

$$C_a = \{m a m^{-1}, m \in G\}.$$

Soit l_a le nombre d'éléments de C_a et soit p_a l'ordre du sous-groupe Z_a contenant tous les éléments de G qui commutent avec a , $g \in Z_a \Leftrightarrow ga = ag$. Alors $n = p_a l_a$ et l_a divise donc n .

Démonstration : soit $s : G \rightarrow C_a$ l'application qui envoie $m \in G$ sur $m a m^{-1} \in C_a$. L'application s est évidemment surjective. L'image inverse d'un élément quelconque de C_a contient un nombre d'éléments égal à p_a . En effet, $m a m^{-1} = m' a m'^{-1}$ ssi $m'^{-1} m a = a m'^{-1} m$ c-à-d. $m'^{-1} m \in Z_a$ et donc $m \in m' Z_a$: m et m' appartiennent à la même classe latérale à gauche de Z_a . Toutes les classes latérales ont même nombre p_a d'éléments et donc

$$n = l_a p_a$$

(nombre d'éléments de G = nombre d'éléments de C_a fois nombre de pré-images d'un élément quelconque de C_a).

1.3 Intégration invariante sur un groupe de Lie

1.3.1 Groupes de Lie matriciels

L'espace des matrices $n \times n$ réelles est isomorphe à \mathbb{R}^{n^2} ; l'espace des matrices $n \times n$ complexes est isomorphe à \mathbb{R}^{2n^2} . On appelle groupe de Lie matriciel tout groupe de matrices qui est aussi une surface régulière de \mathbb{R}^{n^2} ou \mathbb{R}^{2n^2} . [Soient z^A ($A = 1, \dots, q$) des coordonnées sur \mathbb{R}^q . Une surface régulière de dimension p de \mathbb{R}^q est un sous-ensemble Σ de \mathbb{R}^q défini par des équations $F^i(z^A) = 0$ ($i = 1, \dots, q - p$) où les fonctions F^i sont différentiables et telles que la matrice $(q - p) \times q$ des dérivées partielles $\frac{\partial F^i}{\partial z^A}$ est de rang maximum $q - p$ partout sur Σ . Une surface régulière est fermée et est une variété différentiable. Le produit matriciel et l'opération de prendre l'inverse sont des opérations différentiables.]

Soit G un groupe de Lie matriciel de dimension n . On introduit des coordonnées a^k ($k = 1, \dots, n$) sur G . Par exemple, pour le groupe des rotations $SO(3)$, les a^k peuvent être les angles d'Euler, ou les coordonnées cartésiennes d'une boule fermée de rayon π , obéissant donc à $(a^1)^2 + (a^2)^2 + (a^3)^2 \leq \pi$ (avec identification des points antipodaux du bord de la boule, ce qui implique des conditions de périodicité sur les fonctions continues mais n'a pas d'incidence sur l'intégration, l'identification concernant un sous-ensemble de mesure nulle). On notera par $D \subset \mathbb{R}^n$ le domaine de variation des coordonnées a^k correspondant à G (modulo éventuellement un sous-ensemble de mesure nulle).

Le produit sur G définit une fonction $\Phi : D \times D \rightarrow D$ de la manière suivante. Si $g(a^k)$ est l'élément du groupe de coordonnées a^k et $g(b^k)$ celui de coordonnées b^k , alors le produit $g(a^k) g(b^m)$ a pour coordonnées $\Phi^k(a^m; b^p)$. Dans la suite,

nous omettrons les indices sur les coordonnées quand elles sont arguments de fonctions et écrirons donc $g(a)$, $g(b)$, $\Phi^k(a; b)$ etc.

Si $a^k = 0$ sont les coordonnées du neutre, on a évidemment :

$$\Phi^k(0; b) = b^k; \quad \Phi^k(a; 0) = a^k.$$

L'associativité impose en outre la relation :

$$\Phi^k(\Phi(a; b); c) = \Phi^k(a; \Phi(b; c)).$$

Exemples

Le groupe des translations de l'espace \mathbb{R}^n peut être paramétrisé par \mathbb{R}^n lui-même, l'action d'une translation de coordonnées a^k sur un point x^k de \mathbb{R}^n étant :

$$x^k \mapsto x^k + a^k.$$

Le neutre est $a^k = 0$ et la fonction $\Phi(a; b)$ est donnée par

$$\Phi^k(a; b) = a^k + b^k.$$

Un autre exemple est donné par le groupe des matrices 2×2 de la forme

$$\begin{pmatrix} a^1 & a^2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$a^1 > 0$, $-\infty < a^2 < \infty$. Le produit de deux telles matrices est

$$\begin{pmatrix} a^1 & a^2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b^1 & b^2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^1 b^1 & a^1 b^2 + a^2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et donc les coordonnées du produit sont données par :

$$\begin{aligned} \Phi^1(a; b) &= a^1 b^1 \\ \Phi^2(a; b) &= a^1 b^2 + a^2 \end{aligned}$$

Le neutre a pour coordonnées $a^1 = 1$, $a^2 = 0$. En translatant a^1 , $a^1 = a'^1 + 1$, on peut supposer que le neutre a pour coordonnées $a^i = 0$.

Nous supposons par la suite que les coordonnées sur le groupe ont été choisies de manière telle que le neutre correspond à $a^i = 0$.

1.3.2 Intégrale invariante à gauche

Pour intégrer sur le groupe, il faut se donner une "fonction de densité" $\rho(a)$. L'intégrale d'une fonction f définie sur le groupe prend alors la forme

$$\int_D f(a) \rho(a) da$$

où $da \equiv da^1 da^2 \dots da^n$. Pour utiliser des notations plus compactes, et pour insister sur le fait qu'on intègre sur le groupe, on note aussi cette intégrale sous la forme

$$\int_G f(g) d\tau$$

($d\tau \equiv \rho(a) da$ en termes de coordonnées).

L'intégrale invariante à gauche est définie par la condition

$$\int_G f(hg) d\tau = \int_G f(g) d\tau$$

pour tout élément h du groupe et toute fonction f sur le groupe (l'intégrale de la translatée par h de la fonction f coïncide avec l'intégrale de la fonction f). En terme de coordonnées,

$$\int_D f(\Phi(\bar{b}; a)) \rho(a) da = \int_D f(a) \rho(a) da$$

où \bar{b}^k sont les coordonnées de h .

Théorème

L'intégrale invariante à gauche existe et est unique à un facteur multiplicatif près.

Démonstration

Soit b^k les coordonnées de h^{-1} . Soit $a'^k = \Phi^k(\bar{b}; a)$. On a $a^k = \Phi^k(b; a')$. Effectuons le changement de coordonnées $a^k \rightarrow a'^k$. Comme a'^k parcourt également le domaine D , la condition d'invariance à gauche de la mesure devient

$$\int_D f(a') \rho(\Phi(b; a')) J(b; a') da' = \int_D f(a) \rho(a) da$$

où $J(b; a')$ est défini par

$$J(b; a') = |\det M(b; a')|.$$

Ici, $M(b; a')$ est la matrice jacobienne du changement de variables $a^k \rightarrow a'^k$,

$$M_m^k(b, a') = \left. \frac{\partial \Phi^k(b; c)}{\partial c^m} \right|_{c=a'}$$

Remplaçons les variables d'intégration a'^k par a^k (changement de notations) dans la condition d'invariance. On obtient

$$\int_D f(a) \rho(\Phi(b; a)) J(b; a) da = \int_D f(a) \rho(a) da.$$

Cette égalité doit avoir lieu pour toute fonction f sur le groupe. Par conséquent, la fonction de densité (mesure) $\rho(a)$ doit satisfaire à la condition

$$\rho(a) = \rho(\Phi(b; a)) J(b; a)$$

pour tout choix de b^k (c'-à-d. de h).

Cette condition doit être en particulier satisfaite lorsqu'on prend pour a^k les coordonnées du neutre, que nous supposons correspondre à $a^k = 0$. Ceci conduit à

$$\rho(0) = \rho(b)J(b)$$

où on a posé

$$J(b) = J(b; 0).$$

Cette équation détermine complètement la fonction de densité $\rho(b)$ à un facteur multiplicatif près (si elle existe),

$$\rho(a) = \frac{\rho(0)}{J(a)}$$

Pour achever la démonstration du théorème, il faut vérifier que la fonction de densité donnée par cette expression obéit bien à la condition d'être invariante à gauche, $\rho(a) = \rho(\Phi(b; a)) J(b; a)$, ou encore en utilisant l'expression de $\rho(a)$,

$$J(\Phi(b; a)) = J(a)J(b; a).$$

Pour démontrer que cette expression est correcte, on observe que

$$\begin{aligned} M_m^k(\Phi(b; a); 0) &= \left. \frac{\partial \Phi^k(\Phi(b; a); c)}{\partial c^m} \right|_{c=0} \\ &= \left. \frac{\partial \Phi^k(b; \Phi(a; c))}{\partial c^m} \right|_{c=0} \quad (\text{associativité}) \\ &= \left. \frac{\partial \Phi^k(b; z)}{\partial z^l} \right|_{z=a} \left. \frac{\partial z^l}{\partial c^m} \right|_{c=0} \end{aligned}$$

où $z^m = \Phi^m(a; c)$ (ce qui implique $z^m = a^m$ pour $c = 0$). Cette dernière équation est équivalente à

$$M_m^k(\Phi(b; a); 0) = M_l^k(b; a) M_m^l(a; 0)$$

d'où l'on tire la relation cherchée en prenant la valeur absolue du déterminant.

1.3.3 Intégrale invariante à droite

L'intégrale invariante à droite est définie par la même condition, mais où on translate cette fois-ci l'argument de la fonction intégrée à droite,

$$\int_G f(gh) d\eta = \int_G f(g) d\eta$$

pour tout élément h du groupe et toute fonction f sur le groupe. En terme de coordonnées,

$$\int_D f(\Phi(a; \bar{b})) \mu(a) da = \int_D f(a) \mu(a) da$$

où \bar{b}^k sont les coordonnées de h et où $\mu(a)$ est la fonction de densité associée à la mesure invariante à droite $d\eta$.

Théorème

L'intégrale invariante à droite existe et est unique à un facteur multiplicatif près.

Démonstration

La démonstration procède exactement comme ci-dessus. On obtient pour expression explicite de la mesure invariante à droite

$$\mu(a) = \frac{\mu(0)}{\tilde{J}(a)}$$

avec

$$\tilde{J}(b) = |\det \tilde{M}_m^k(0; b)|, \quad \tilde{M}_m^k(a; b) = \left. \frac{\partial \Phi^k(c; b)}{\partial c^m} \right|_{c=a}.$$

1.3.4 Exemples

Groupe des translations

On a $J(a) = \tilde{J}(a) = 1$ et donc les mesures invariantes à gauche et à droite coïncident. L'intégrale invariante sur le groupe est donnée par

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(a) da$$

($\rho(a) = \mu(a) = 1$).

Groupe à deux paramètres étudié ci-dessus

On a

$$\begin{aligned} \Phi^1(a; b) &= a^1 b^1 \\ \Phi^2(a; b) &= a^1 b^2 + a^2 \end{aligned}$$

et les coordonnées de l'identité sont $a^1 = 1, a^2 = 0$.

La matrice jacobienne $M_m^k(b; a)$ est donnée par

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi^1(b; a)}{\partial a^1} &= b^1, & \frac{\partial \Phi^1(b; a)}{\partial a^2} &= 0 \\ \frac{\partial \Phi^2(b; a)}{\partial a^1} &= 0, & \frac{\partial \Phi^2(b; a)}{\partial a^2} &= b^1 \end{aligned}$$

De là, il vient $J(b) = (b^1)^2$ et donc

$$\rho(b) = \frac{\text{constante}}{(b^1)^2}.$$

L'intégrale invariante à gauche est donnée par

$$\int_0^\infty \frac{db^1}{(b^1)^2} \int_{-\infty}^\infty db^2 f(b^1, b^2).$$

De même, la matrice jacobienne $\tilde{M}_m^k(b; a)$ est donnée par

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi^1(a; b)}{\partial a^1} &= b^1, & \frac{\partial \Phi^1(a; b)}{\partial a^2} &= 0 \\ \frac{\partial \Phi^2(a; b)}{\partial a^1} &= b^2, & \frac{\partial \Phi^2(a; b)}{\partial a^2} &= 1 \end{aligned}$$

De là, il vient $\tilde{J}(b) = b^1$ et donc

$$\mu(b) = \frac{\text{constante}}{b^1}.$$

L'intégrale invariante à droite est donnée par

$$\int_0^\infty \frac{db^1}{b^1} \int_{-\infty}^\infty db^2 f(b^1, b^2).$$

Les mesures invariantes à gauche et invariantes à droite sont clairement distinctes dans ce cas.

1.3.5 Groupes compacts

On dit qu'un groupe est unimodulaire si toute mesure invariante à gauche est invariante à droite. On parle alors de "mesure invariante" (sans préciser).

Une classe importante (mais non exhaustive) de groupes unimodulaires est fournie – comme on va le montrer – par les groupes compacts, c'-à-d., puisqu'on travaille avec des groupes matriciels, par les groupes qui sont des fermés bornés de \mathbb{R}^{n^2} ou \mathbb{R}^{2n^2} (surfaces bornées de \mathbb{R}^{n^2} ou \mathbb{R}^{2n^2}). Par exemple, $U(n)$, $SU(n)$, $O(n)$ et $SO(n)$ sont des groupes compacts. [Pour $U(n)$ et $SU(n)$: la condition $UU^\dagger = I$ implique $\sum_i U_{ji} U_{mi}^* = \delta_{jm}$ et donc $\sum_i |U_{ji}|^2 = 1$, ce qui montre que les U_{ji} restent dans un ensemble borné. Idem pour $O(n)$ et $SO(n)$.]

Pour les groupes compacts, il est naturel de normaliser les intégrales invariantes à 1,

$$\int_G d\tau = \int_D \rho(a) da = 1, \quad \int_G d\eta = \int_D \mu(a) da = 1$$

C'est ce que nous ferons systématiquement.

Théorème

Les groupes compacts sont unimodulaires.

Démonstration

Soit $\sigma \in G$ un élément quelconque du groupe. On définit une mesure $d\nu$ sur G par la formule

$$\int_G f(g) d\nu = \int f(\sigma g \sigma^{-1}) d\tau.$$

La fonction de densité $\psi(a)$ associée à $d\nu$ se tire de la définition

$$\int_D f(a) \psi(a) da = \int_D f(\Phi(b; \Phi(a; \bar{b}))) \rho(a) da$$

par le changement de variables $a^k \rightarrow \Phi^k(b; \Phi(a; \bar{b}))$. Ici, les b^k sont les coordonnées de σ et \bar{b}^k celles de σ^{-1} .

On a :

$$\begin{aligned} \int_G f(hg) d\nu &= \int_G f(\sigma h g \sigma^{-1}) d\tau \\ &= \int_G f(\sigma h \sigma^{-1} \sigma g \sigma^{-1}) d\tau \\ &= \int_G f(\sigma g \sigma^{-1}) d\tau \quad (\text{car } d\tau \text{ est invariante à gauche}) \\ &= \int_G f(g) d\nu \end{aligned}$$

Donc la mesure $d\nu$ est invariante à gauche et diffère par conséquent de $d\tau$ par une constante qui peut dépendre de σ ,

$$d\nu = c(\sigma) d\tau \quad \Leftrightarrow \quad \int_G f(\sigma g \sigma^{-1}) d\tau = c(\sigma) \int_G f(g) d\tau.$$

Pour $f = 1$ (fonction égale à 1 en tout point du groupe), on a $f(g) = 1 = f(\sigma g \sigma^{-1})$. Donc la constante $c(\sigma)$ est égale à 1 (on utilise ici le fait que la fonction 1 est intégrable comme le groupe est compact). Il vient donc

$$\int_G f(\sigma g \sigma^{-1}) d\tau = \int_G f(g) d\tau.$$

Comme $d\tau$ est invariante à gauche, cette formule conduit à

$$\int_G f(g \sigma^{-1}) d\tau = \int_G f(g) d\tau$$

($\forall \sigma$), ce qui montre que $d\tau$ est aussi invariante à droite et coïncide avec $d\eta$.

1.4 Réductibilité complète des représentations de dimension finie des groupes finis et des groupes de Lie compacts

Dans cette section, G est un groupe fini d'ordre n , $|G| = n$. Comme dans le cours de Bac3, on ne considère que des représentations de dimension finie, même si ce n'est pas dit explicitement.

1.4.1 Théorème

Enoncé

Toute représentation d'un groupe fini est équivalente à une représentation unitaire et est donc complètement réductible.

Démonstration

Soit X l'espace de la représentation et (\cdot, \cdot) le produit hermitien sur X . Soient $T(g)$ les opérateurs de la représentation. On n'a pas a priori $(T(g)x, T(g)y) = (x, y)$, mais on va montrer qu'il existe S tel que $(T'(g)x, T'(g)y) = (x, y)$ où $T'(g) = ST(g)S^{-1}$. A cette fin, on introduit le produit hermitien auxiliaire

$$(x, y)_1 = \frac{1}{n} \sum_{g \in G} (T(g)x, T(g)y).$$

La somme est bien définie puisqu'elle est finie. On a

1. $(x, y)_1 = ((y, x)_1)^*$
2. $(x, \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2)_1 = \alpha_1 (x, y_1)_1 + \alpha_2 (x, y_2)_1$
3. $(x, x)_1 = \frac{1}{n} \sum_{g \in G} (T(g)x, T(g)x) \geq 0$

avec $(x, x)_1 = 0$ ssi chacun des termes non négatifs $(T(g)x, T(g)x)$ est nul et donc en particulier $(T(e)x, T(e)x) = (x, x) = 0$ ce qui implique $x = 0$. Le produit $(\cdot, \cdot)_1$ est donc bien hermitien.

Les opérateurs $T(g)$ sont hermitiens pour le produit scalaire auxiliaire $(\cdot, \cdot)_1$. En effet,

$$\begin{aligned} (T(g)x, T(g)y)_1 &= \frac{1}{n} \sum_{g' \in G} (T(g')T(g)x, T(g')T(g)y) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{g' \in G} (T(g'g)x, T(g'g)y) \end{aligned}$$

Mais lorsque g' parcourt le groupe une et une seule fois, le produit $g'g$ parcourt aussi le groupe une et une seule fois. Donc

$$\begin{aligned} (T(g)x, T(g)y)_1 &= \frac{1}{n} \sum_{h \in G} (T(h)x, T(h)y) \\ &= (x, y)_1 \end{aligned}$$

La représentation T est donc bien unitaire pour le produit scalaire hermitien auxiliaire.

Soit $\{\bar{e}_k\}$ une base orthonormée pour le produit scalaire hermitien auxiliaire et $\{e_k\}$ une base orthonormée pour le produit de départ. On a $e_k = S\bar{e}_k$ pour un certain opérateur inversible S (opérateur de changement de base). Comme $(\bar{e}_k, \bar{e}_l)_1 = \delta_{kl} = (e_k, e_l) = (S\bar{e}_k, S\bar{e}_l)$ pour tous k, l , on a aussi

$$(x, y)_1 = (Sx, Sy), \quad (x, y) = (S^{-1}x, S^{-1}y)_1$$

pour tous vecteurs $x, y \in X$.

Soit $T'(g) = ST(g)S^{-1}$. Démontrons que les opérateurs $T'(g)$ sont unitaires pour le produit scalaire hermitien de départ. On a :

$$\begin{aligned} (T'(g)x, T'(g)y) &= (ST(g)S^{-1}x, ST(g)S^{-1}y) \\ &= (T(g)S^{-1}x, T(g)S^{-1}y)_1 \\ &= (S^{-1}x, S^{-1}y)_1 \\ &= (x, y) \end{aligned}$$

ce qui démontre l'assertion.

1.4.2 Commentaires

1. Comme toute représentation unitaire est complètement réductible, toute représentation d'un groupe fini se décompose comme somme directe

$$T = m_1T_1 \oplus m_2T_2 \oplus \cdots \oplus m_kT_k$$

de représentations irréductibles. Pour décrire la représentation la plus générale, il faut connaître toutes les représentations irréductibles.

2. La même propriété vaut pour les groupes compacts. Il suffit de définir le produit scalaire hermitien auxiliaire en utilisant l'intégrale invariante,

$$(x, y)_1 = \int_G (T(g)x, T(g)y) d_L\tau$$

et de procéder ensuite comme ci-dessus. $[(x, y)_1$ est bien défini comme intégrale sur un compact d'une fonction continue.]

Chapitre 2

Représentations des groupes finis

- 2.1 Représentation régulière
- 2.2 Relations d'orthogonalité
- 2.3 Caractères des représentations irréductibles
- 2.4 Exemple : Représentations irréductibles du groupe S_3
- 2.5 Application : Calcul des modes de vibration d'un système possédant des symétries

VOIR NOTES MANUSCRITES

Chapitre 3

Groupes cristallographiques ponctuels

3.1 Généralités sur le groupe Euclidien $IO(n)$

3.1.1 $IO(n)$ et réflexions

On appelle groupe euclidien inhomogène $IO(n)$ le groupe des isométries de l'espace euclidien E_n . Ce groupe contient les translations, les rotations et les réflexions par rapport à un hyperplan quelconque, ainsi que leurs produits. Le sous-groupe $ISO(n)$ des déplacements ne contient que les isométries préservant l'orientation et est engendré par les translations et les rotations.

Toute transformation de $IO(n)$ peut s'écrire en fait comme un produit fini de réflexions. Celles-ci engendrent donc tout $IO(n)$. En effet, la translation par \mathbf{a} est égale au produit de la réflexion par rapport à l'hyperplan perpendiculaire à \mathbf{a} passant par l'origine et de la réflexion par rapport à l'hyperplan parallèle passant par $\mathbf{a}/2$. Ceci ramène le problème à écrire un élément quelconque de $O(n)$ comme produit de réflexions. On raisonne par récurrence sur la dimension : la propriété est vraie pour $n = 2$ car toute rotation du plan d'angle φ est égale au produit de deux réflexions par rapport à des droites faisant un angle $\varphi/2$. D'autre part, si la propriété est vraie en dimension n , elle est aussi vraie en dimension $n + 1$: soit A un élément de $O(n + 1)$. On a $E_{n+1} = E_n \oplus \mathbb{R}\mathbf{e}_{n+1}$. Soit S la réflexion par rapport à l'hyperplan orthogonal à $\mathbf{e}_{n+1} - A\mathbf{e}_{n+1}$ (si $A\mathbf{e}_{n+1} = \mathbf{e}_{n+1}$, A est en fait un élément de $O(n)$ et il n'y a rien à montrer, voir plus bas). Le produit SA laisse \mathbf{e}_{n+1} fixe et définit donc un élément de $O(n)$. Par l'hypothèse de récurrence, on peut écrire cet élément comme un produit de k réflexions S_i de E_n , que l'on peut étendre à E_{n+1} en posant $S_i\mathbf{e}_{n+1} = \mathbf{e}_{n+1}$ (ce qui revient à prendre pour hyperplan de réflexion dans E_{n+1} l'hyperplan $H_i \oplus \mathbb{R}\mathbf{e}_{n+1}$ où H_i est l'hyperplan (à $n - 1$ dimensions) de la réflexion S_i dans E_n). On a ainsi $SA = S_1S_2 \cdots S_k$ et donc puisque $S^2 = I$, $A = SS_1S_2 \cdots S_k$.
cqfd

3.1.2 Caractérisation des éléments de $SO(3)$

On notera en particulier que tout élément de $SO(3)$ peut s'écrire comme le produit de deux réflexions. Tout élément R de $SO(3)$ est en effet la matrice d'une rotation d'angle φ et d'axe \mathbf{n} , $R = r(\varphi, \mathbf{n})$. Le produit de deux réflexions dans des plans se coupant le long de l'axe de la rotation et formant un angle $\varphi/2$ est égal à R .

3.1.3 Linéarité

Les réflexions ne sont des transformations linéaires que si elles s'effectuent par rapport à des hyperplans passant par l'origine. Dans ce cas, la transformation est donnée explicitement par

$$S_0 : \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x} - 2(\mathbf{x} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}$$

où \mathbf{n} est le vecteur de norme 1 orthogonal à l'hyperplan Π de réflexion (l'ambiguïté de signe de \mathbf{n} ne joue pas). Par contre, pour une réflexion S effectuée dans un hyperplan Π' parallèle à Π passant par $k\mathbf{n}$ ($k \in \mathbb{R}$), on a

$$S : \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x} - 2(\mathbf{x} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} + 2k\mathbf{n}$$

(car $S = (SS_0)S_0$ et SS_0 est la translation par $2k\mathbf{n}$). A cause du dernier terme, la transformation n'est pas linéaire,

$$S\left(\sum_i \lambda_i \mathbf{x}_i\right) = \sum_i \lambda_i S(\mathbf{x}_i) + \left(1 - \sum_i \lambda_i\right)2k\mathbf{n}. \quad (3.1)$$

On notera en particulier que $S(\sum_i \lambda_i \mathbf{x}_i) = \sum_i \lambda_i S(\mathbf{x}_i)$ si $\sum_i \lambda_i = 1$ et donc $T(\sum_i \lambda_i \mathbf{x}_i) = \sum_i \lambda_i T(\mathbf{x}_i)$ si $\sum_i \lambda_i = 1$ pour tout $T \in IO(n)$.

3.1.4 Sous-groupes finis du groupe Euclidien $ISO(n)$

Theorème 3.1.1. *Soit G un sous groupe fini de $IO(n)$. Alors, G laisse un point fixe, c'-à-d., il existe un point $\mathbf{x} \in E_n$ tel que*

$$g(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \quad \forall g \in G.$$

Démonstration : Soit \mathbf{y} un point quelconque de E_n . On considère le "centre de gravité" de son orbite,

$$\mathbf{x} = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g(\mathbf{y})$$

La somme est bien définie car il n'y a qu'un nombre fini de termes. Par le théorème de réarrangement, on a

$$h(\mathbf{x}) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} h(g(\mathbf{y})) = \frac{1}{|G|} \sum_{g' \in G} g'(\mathbf{y}) = \mathbf{x} \quad \forall h \in G$$

(on utilise (3.1) en observant que dans ce cas-ci $\sum_i \lambda_i = 1$), ce qui montre que \mathbf{x} est un point fixe de G . \square

Theorème 3.1.2. *Soit G un sous groupe fini de $ISO(n)$. Alors, G est contenu dans $SO(n)$.*

Démonstration : Ceci est une conséquence directe du fait que tout déplacement possédant un point fixe (que l'on suppose être l'origine) est une rotation. \square

3.2 Sous-groupes finis de $O(2)$

3.2.1 Sous-groupes finis de $SO(2)$

Les éléments de $SO(2)$ sont les rotations du plan autour de l'origine. Si G est un sous-groupe non trivial de $SO(2)$, alors G contient une rotation non triviale d'angle minimum, soit $R(\varphi)$. Si G est fini, on a $R^p = I$ pour un certain entier p et donc φ est égal à $\frac{k}{p}(2\pi)$ où k et p sont des entiers que l'on peut supposer positifs et premiers entre eux. On prétend que $k = 1$. En effet, il existe (au moins) un multiple de $\frac{k}{p}$ qui diffère de $\frac{1}{p}$ par un entier, $kz - pz' = 1$, $z, z' \in \mathbb{Z}$ (car k et p sont premiers entre eux¹). Ceci montre que G contient la rotation d'angle $\frac{1}{p}(2\pi)$, et comme $\frac{k}{p}(2\pi)$ est le plus petit angle de rotation dans G , on a $k = 1$.

Soit $R(\varphi')$ un élément de G . L'angle φ' est nécessairement un multiple de $\frac{1}{p}(2\pi)$; dans le cas contraire, il y aurait une rotation d'angle plus petit que $\frac{1}{p}(2\pi)$ dans G , contrairement aux hypothèses. Donc, G est le groupe cyclique C_p contenant les rotations d'angle $\frac{k}{p}(2\pi)$, $k = 0, 1, \dots, p-1$. Il y a une infinité de sous-groupes finis de $SO(2)$, caractérisés par un entier positif p . Ces groupes sont les groupes des déplacements préservant un polygone régulier à p côtés.

Sous-groupes finis de $O(2)$

On obtient les sous-groupes finis de $O(2)$ en ajoutant des réflexions aux groupes C_p . Le produit de la réflexion par rapport à la droite D passant par l'origine et de la rotation d'angle φ est la réflexion par rapport à la droite D' faisant un angle $\varphi/2$ avec D (et passant aussi par l'origine). D'autre part, le produit des réflexions par rapport aux droites F et F' faisant un angle α est la rotation d'angle 2α . Il en découle que les sous-groupes finis de $O(2)$ contenant des réflexions s'obtiennent en ajoutant à C_p p réflexions par rapport à p droites faisant un angle $\frac{\pi}{p}$. Les groupes correspondants sont appelés groupes diédraux

1. Ceci découle de ce qu'on appelle l'identité de Bezout : soient a et b deux entiers de plus grand diviseur commun d . Alors il existe $x, y \in \mathbb{Z}$ tels que $ax + by = d$. En particulier, si a et b sont premiers entre eux, il existe $x, y \in \mathbb{Z}$ tels que $ax + by = 1$. Démonstration : considérons les entiers positifs de la forme $aw + bz$, $w, z \in \mathbb{Z}$. Soit e le plus petit de ces nombres, $e = xa + yb > 0$. La division de a par e donne $a = qe + r$, où le reste r est compris entre 0 et e , $0 \leq r < e$. Substituant $e = xa + yb$, on trouve $r = a(1 - qx) - bqy$ et donc r est de la forme $aw + bz$, $w, z \in \mathbb{Z}$. Comme $r < e$, ceci implique $r = 0$ car e est le plus petit nombre positif de cette forme. Par conséquent, e divise a . De même, e divise b . Enfin, soit c un diviseur commun de a et b . Alors c divise $e = xa + yb$. Il en résulte que $e = d$ est le plus grand diviseur commun de a et de b .

d'ordre $2p$ et notés D_p . Ce sont les groupes de symétries complets des polygones réguliers.

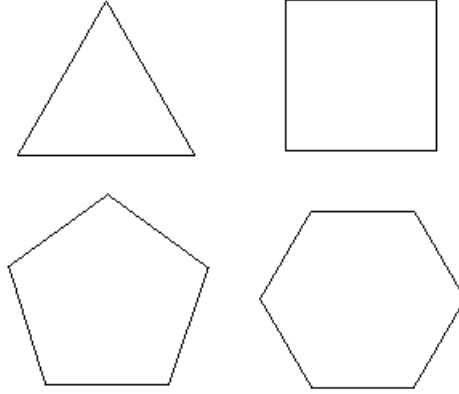


FIGURE 3.1 – Quelques polygones réguliers (triangle équilatéral, carré, pentagone et hexagone réguliers)

Remarque 3.2.1. *Le plan Π sur lequel agit $O(2)$ peut être plongé dans l'espace à trois dimensions. Les groupes C_p et D_p peuvent alors être vus comme sous-groupes finis de $SO(3)$. C'est évident pour C_p dont les éléments peuvent être vus comme des rotations autour de l'axe perpendiculaire au plan Π passant par l'origine ; on dit que cet axe est un axe d'ordre p . C'est aussi vrai pour D_p si on voit les réflexions planaires par rapport à la droite D de Π comme une rotation d'espace d'angle π autour de D . Le groupe diédral D_p contient donc un axe d'ordre p et p axes d'ordre deux. A noter que vus comme sous-groupes de $SO(3)$, les groupes C_2 et D_1 sont équivalents (un seul axe d'ordre 2 dans les deux cas).*

3.2.2 Groupes cristallographiques ponctuels à deux dimensions

On dit qu'un groupe est cristallographique s'il préserve un réseau. Un réseau R de l'espace \mathbb{R}^n est par définition l'ensemble de tous les vecteurs combinaisons linéaires à coefficients entiers de n vecteurs linéairement indépendants \mathbf{a}_i ($i = 1, \dots, n$),

$$\mathbf{x} \in R \Leftrightarrow \mathbf{x} = \sum_{i=1}^n z_i \mathbf{a}_i, \quad z_i \in \mathbb{Z}.$$

Les seuls axes permis pour un groupe cristallographique sont d'ordre $p = 1, 2, 3, 4, 6$. En effet, une condition nécessaire pour que la rotation d'angle $\frac{2\pi}{p}$ préserve R est

que sa trace soit un entier². La trace de la matrice de rotation $R(\varphi)$ est égale à $2 \cos \varphi$. Il faut donc

$$2 \cos\left(\frac{2\pi}{p}\right) \in \mathbb{Z}.$$

Ceci donne comme possibilités

$$2 \cos\left(\frac{2\pi}{p}\right) = \pm 2, \pm 1, 0$$

correspondant aux cas $p = 1, 2, 6, 3, 4$ annoncés. La condition nécessaire est aussi suffisante (à deux dimensions). Par exemple, $C_1 \equiv \{I\}$, D_1 , C_2 , D_2 , C_4 et D_4 préservent les réseaux carrés (vecteurs de base \mathbf{a}_1 et \mathbf{a}_2 de même norme et orthogonaux), tandis que C_3 , D_3 , C_6 et D_6 préservent les réseaux hexagonaux (vecteurs de base \mathbf{a}_1 et \mathbf{a}_2 de même norme et formant un angle de 120°).

On appelle groupe cristallographique ponctuel à deux dimensions tout sous-groupe cristallographique fini de $O(2)$. Il y a dix tels groupes : C_p , D_p ($p = 1, 2, 3, 4, 6$).

3.3 Groupes cristallographiques ponctuels à trois dimensions

On appelle groupe cristallographique ponctuel à trois dimensions tout sous-groupe cristallographique fini de $O(3)$.

3.3.1 Polyèdres réguliers

Liste

Plusieurs groupes cristallographiques sont liés aux polyèdres réguliers (ou “solides de Platon”). Nous allons d’abord décrire ces polyèdres et leur groupe de symétrie.

Un polyèdre régulier est un polyèdre dont toutes les faces sont des polygones réguliers identiques et dont tous les sommets sont entourés par le même nombre de faces. Si p est le nombre de côtés du polygone régulier qui intervient dans le polyèdre et q le nombre de faces qui entourent un sommet, on note le polyèdre $\{p, q\}$. Bien entendu, $p > 2$ et $q > 2$. Dans le plan, il existe une infinité de polygones réguliers. Les polyèdres réguliers sont par contre en nombre fini.

L’angle formé par les côtés adjacents d’un polygone réguliers à p côtés est égal à $\pi(1 - \frac{2}{p})$. A un sommet du polyèdre régulier $\{p, q\}$ se rencontrent q tels polygones et la somme des angles des faces qui se rejoignent est strictement inférieure à 2π . Donc, on a $q\pi(1 - \frac{2}{p}) < 2\pi$ ou encore

$$\frac{1}{q} + \frac{1}{p} > \frac{1}{2} \tag{3.2}$$

2. La trace de la matrice d’une transformation ne dépend pas de la base. Dans une base adaptée au réseau, où les vecteurs de base sont $\{\mathbf{a}_n\}$, la matrice d’une transformation qui préserve le réseau est à coefficients entiers, donc sa trace est entière.

Les seules solutions sont

$$\begin{aligned} &\{3,3\} \\ &\{3,4\}, \{4,3\} \\ &\{3,5\}, \{5,3\} \end{aligned}$$

Le premier cas correspond au tétraèdre régulier. Les deuxième et troisième cas correspondent à l'octaèdre et au cube. Les quatrième et cinquième cas correspondent à l'icosaèdre et au dodécaèdre.

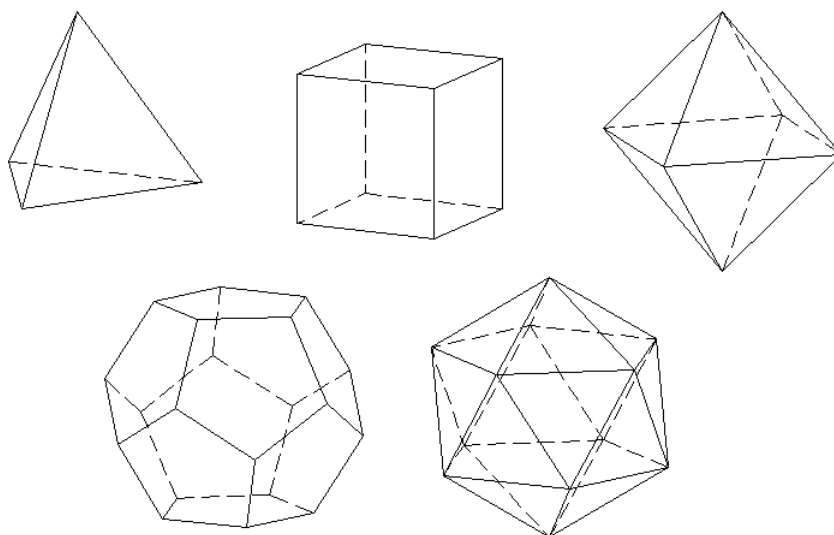


FIGURE 3.2 – Les polyèdres réguliers (tétraèdre, cube, octaèdre, dodécaèdre et icosaèdre)

Ces polyèdres réguliers ont des nombres de faces (N_2), arêtes (N_1) et sommets (N_0) donnés par

$$\text{Tétraèdre } \{3,3\} \quad N_0 = 4 \quad N_1 = 6 \quad N_2 = 4 \quad (3.3)$$

$$\text{Octaèdre } \{3,4\} \quad N_0 = 6 \quad N_1 = 12 \quad N_2 = 8 \quad (3.4)$$

$$\text{Cube } \{4,3\} \quad N_0 = 8 \quad N_1 = 12 \quad N_2 = 6 \quad (3.5)$$

$$\text{Icosaèdre } \{3,5\} \quad N_0 = 12 \quad N_1 = 30 \quad N_2 = 20 \quad (3.6)$$

$$\text{Dodécaèdre } \{5,3\} \quad N_0 = 20 \quad N_1 = 30 \quad N_2 = 12 \quad (3.7)$$

On obtient ces nombres par inspection (un calcul est donné aux exercices). A noter que

$$N_2 - N_1 + N_0 = 2 \quad (\text{“formule d’Euler”}), \quad (3.8)$$

formule qui sera démontrée aux exercices. On a également pour tout polyèdre régulier $\{p, q\}$,

$$qN_0 = 2N_1 = pN_2 \tag{3.9}$$

En effet, le nombre N_1 d'arêtes est égal au nombre N_0 de sommets fois q (car de tout sommet part q arêtes) divisé par 2 (car ce faisant, on compte chaque arête deux fois). De même, N_1 est aussi égal au nombre N_2 de faces fois p (car chaque face contient p arêtes) divisé par 2 (car chaque arête appartient à deux faces).

Groupes des polyèdres

On appelle groupe du polyèdre $\{p, q\}$ le sous-groupe (fini) $R_{\{p,q\}}$ de $SO(3)$ qui laisse le polyèdre $\{p, q\}$ invariant. Si un axe de rotation de $R_{\{p,q\}}$ (passant par le centre du polyèdre) passe par l'intérieur d'une face, il doit nécessairement passer par le centre de celle-ci et il doit être d'ordre p . De même, si un axe de rotation passe par l'intérieur d'une arête, il doit nécessairement passer par le milieu de celle-ci il doit être d'ordre 2. Enfin, un axe de rotation passant par un sommet doit être d'ordre q . Il y a donc N_0 axes d'ordre q , N_1 axes d'ordre 2 et N_2 axes d'ordre p . Clairement,

$$R_{\{p,q\}} = R_{\{q,p\}} \tag{3.10}$$

Pour chaque sommet, on a $q - 1$ rotations; pour chaque arête, on a une rotation; et pour chaque face, on a $p - 1$ rotations (en excluant chaque fois l'identité). Mais sommets, arêtes et faces viennent par paires antipodales, sauf pour le tétraèdre, où chaque sommet est opposé à une face. Donc, le nombre total de rotations (excluant l'identité) est égal à

$$\frac{1}{2}[N_0(q - 1) + N_1 + N_2(p - 1)] = \frac{1}{2}(N_0q - 2 + N_2p) = 2N_1 - 1$$

par (3.8) et (3.9). Par conséquent, l'ordre de $R_{\{p,q\}} = R_{\{q,p\}}$ est $2N_1$. Une dérivation alternative est donnée aux exercices.

Le groupe $R_{\{3,3\}}$ du tétraèdre est d'ordre 12, celui de l'octaèdre (ou du cube) est d'ordre 24 et celui de l'icosaèdre (ou du dodécaèdre) est d'ordre 60. Seuls $R_{\{3,3\}}$ et $R_{\{3,4\}} = R_{\{4,3\}}$ sont cristallographiques (même argument qu'à 2 dimensions). Les groupes complets de symétrie des polyèdres réguliers s'obtiennent en ajoutant les réflexions (exercices). On note souvent $R_{\{3,3\}} \equiv T$, $R_{\{3,4\}} = R_{\{4,3\}} \equiv O$ et $R_{\{3,5\}} = R_{\{5,3\}} \equiv Y$.

3.3.2 Sous-groupes finis de $SO(3)$

Soit G un sous-groupe fini de $SO(3)$. Comme l'origine est invariante par G , il est commode de considérer G comme un groupe agissant sur la sphère. Chaque rotation peut être ainsi vue comme une rotation autour d'un point de la sphère (une rotation d'angle φ autour de P étant la même chose qu'une rotation d'angle $-\varphi$ autour du point antipodal).

On appelle triangle sphérique tout triangle sur la sphère dont les côtés sont des segments de grands cercles.

Theorème 3.3.1. *Si les sommets d'un triangle sphérique PQR sont ordonnés dans le sens négatif (c'-à-d., dans le sens horloge) et que p, q, r sont les angles respectifs à ces sommets, alors le produit des rotations d'angles $2p, 2q$ et $2r$ autour de P, Q et R est égal à l'identité.*

Démonstration : On exprime chacune des rotations comme produit de réflexions dans les grands cercles : RP, PQ pour la première ; PQ, QR pour la deuxième ; et QR, RP pour la troisième. \square

Par conséquent, le produit des rotations d'angles $2p$ et $2q$ autour de P et Q est la rotation d'angle $-2r$ autour de R .

Sous-groupes finis de $SO(3)$ ne possédant que des axes d'ordre 2

Le produit de deux demi-tours autour de P et Q est une rotation autour d'un des pôles du grand cercle passant par P et Q d'un angle $-2r$ (ou de $2r$ autour de l'autre pôle). Que vaut r ? Comme le sommet R du triangle sphérique est un des pôles, l'angle r en R est égal à l'angle POQ formé par les demi-droites OP et OQ passant par le centre O de la sphère. Cette rotation ne sera un demi-tour que si les axes OP et OQ sont perpendiculaires. Donc, les seuls sous-groupes finis de $SO(3)$ ne possédant que des axes d'ordre 2 sont C_2 (groupe cyclique d'ordre 2 avec un seul axe d'ordre 2) et D_2 (groupe diédral d'ordre 4 avec trois axes d'ordre 2 perpendiculaires).

Sous-groupes finis de $SO(3)$ ne possédant qu'un seul axe d'ordre p strictement plus grand que 2, $p > 2$

S'il y a un seul axe d'ordre p , celui-ci doit être perpendiculaire à tout axe d'ordre 2 qui serait présent. En effet, le produit des rotations autour de P et de Q doit être un demi-tour autour du sommet R du triangle sphérique formé comme ci-dessus et donc les arcs de grands cercles QP et QR sont orthogonaux au grand cercle QR , ce qui montre que P est un des pôles de QR et donc l'axe d'ordre p est orthogonal à tout axe d'ordre 2 qui serait présent. Les seules possibilités sont donc les groupes cycliques C_p d'ordre p et les groupes diédraux D_p d'ordre $2p$ (avec $p = 3, 4, 6$ si le groupe est cristallographique).

Sous-groupes finis de $SO(3)$ possédant plusieurs axes d'ordre strictement plus grand que 2

Soit OP un axe d'ordre p . Considérons tous les points sur la sphère correspondant à des axes d'ordre strictement plus grand que 2 et leur distance (sur la sphère) à P . Comme le sous-groupe est fini, il existe une plus petite distance parmi ces distances et donc un point Q_1 à distance minimum de P définissant un axe d'ordre q strictement plus grand que 2. Des rotations successives d'angle $\frac{2\pi}{p}$ autour de P amène Q_1 sur les points Q_2, \dots, Q_p qui sont tous des centres

d'ordre q . Ces points sont sur un petit cercle de centre P et de rayon PQ_1 , qui ne possède aucun centre d'ordre strictement plus grand que 2 en son intérieur.

Considérons le produit de la rotation d'angle $\frac{2\pi}{p}$ autour de P par la rotation d'angle $\frac{2\pi}{q}$ autour de Q_1 . C'est une rotation d'angle $-\frac{2\pi}{r}$ autour du point R tel que le triangle sphérique PQ_1R a pour angles $\frac{\pi}{p}$, $\frac{\pi}{q}$ et $\frac{\pi}{r}$. Le point R est donc sur la bissectrice de Q_pPQ_1 . A ce stade, on ne peut dire que r est un entier (on peut avoir $\frac{2\pi}{r} = k\frac{2\pi}{s}$) mais comme la somme des angles d'un triangle sphérique est strictement plus grande que π , on sait que

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} > 1.$$

Mais $p \geq 3$ et $q \geq 3$. Donc $r < 3$ et l'angle en Q_1 du triangle PQ_1R est plus petit que son angle en R . Il en résulte que R est à l'intérieur du petit cercle³ autour de P contenant les Q_i . Comme il n'y a pas d'axe d'ordre strictement plus grand que 2 dans cet intérieur, R est nécessairement un centre d'ordre 2. La rotation d'angle $-\frac{2\pi}{r}$ est un demi-tour. Comme elle amène Q_p en Q_1 (c'est le produit de la rotation d'angle $\frac{2\pi}{p}$ autour de P par la rotation d'angle $\frac{2\pi}{q}$ autour de Q_1), R est sur le grand cercle joignant Q_p à Q_1 . C'est donc le milieu du côté Q_pQ_1 du polygone sphérique $Q_1Q_2 \cdots Q_p$.

Des rotations successives d'angle $\frac{2\pi}{q}$ autour de Q_1 transforme ce polygone régulier (d'angle $\frac{2\pi}{q}$ et possédant p côtés) en un ensemble de q p -gones réguliers entourant Q_1 , dont chaque sommet est un centre d'ordre q . Continuant de la sorte en effectuant des rotations d'angle $\frac{2\pi}{q}$ autour des autres centres d'ordre q , on recouvre toute la sphère par des p -gones réguliers.

Les transformés de Q_1 sont donc les sommets d'un polyèdre régulier $\{p, q\}$, les transformés de P étant les centres des faces et les transformés de R les milieux des arêtes (projetés radialement sur la sphère). Le groupe G est un des groupes des polyèdres $\{p, q\}$.

Résumé

La liste complète des sous-groupes finis de $SO(3)$ est donnée par les groupes :

$$C_p, D_p, T, O, Y. \tag{3.11}$$

Parmi ceux-ci, il y a 11 groupes cristallographiques,

$$C_1, C_2, C_3, C_4, C_6, D_2, D_3, D_4, D_6, T, O. \tag{3.12}$$

3.3.3 Les 32 groupes cristallographiques ponctuels

Les groupes cristallographiques ponctuels sont par définition les sous-groupes finis cristallographiques de $O(3)$. Le sous-groupe d'un groupe cristallographique ponctuel qui contient les transformations de déterminant +1 est un sous-groupe

3. Les angles sont égaux quand R est sur le petit cercle et que le triangle PQ_1R est isocèle.

fini cristallographique de $SO(3)$ et donc un des onze groupes donnés ci-dessus. Ce sous-groupe est un sous-groupe normal d'indice 2.

On obtient le groupe cristallographique ponctuel le plus général en ajoutant de manière cohérente des “réflexion-rotations” (éléments de $O(3)$ de déterminant -1). Ce problème a été étudié systématiquement et conduit à 32 possibilités. Une idée de la démarche suivie est développée aux exercices. La liste des 32 possibilités est donnée dans la littérature à laquelle nous renvoyons le lecteur intéressé. On y trouvera aussi, pour chacun des groupes cristallographiques ponctuels, la table des représentations irréductibles.

Les sous-groupes finis de $O(3)$ apparaissent comme groupes de symétries de molécules. Les groupes cristallographiques ponctuels apparaissent aussi dans l'étude des groupes cristallographiques, c'-à-d., des sous-groupes du groupe euclidien $IO(3)$ qui préserve un réseau (“réseau cristallin”). Ces groupes contiennent des translations et sont donc infinis (pas de point fixe). Il y a 230 groupes cristallographiques distincts. Soit G_∞ un groupe cristallographique. Les éléments de G_∞ sont de la forme $(S, \vec{\tau})$ où $S \in O(3)$ et $\vec{\tau}$ est une translation ($\vec{x} \rightarrow \vec{x}' = S\vec{x} + \vec{\tau}$). Les S apparaissant dans G_∞ forment un sous-groupe fini cristallographique de $O(3)$ qu'on appelle groupe ponctuel du réseau et qui doit être l'un des 32 groupes mentionnés ci-dessus. Réseaux ayant le même groupe ponctuel appartiennent “à la même classe cristalline”. Il y a donc 32 classes cristallines.

Chapitre 4

Opérateurs tensoriels irréductibles

4.1 Opérateurs d'entrelacement et représentations complètement réductibles

Soit T une représentation complètement réductible du groupe G ,

$$T = m_1 T^1 \oplus m_2 T^2 \oplus \cdots \oplus m_k T^k. \quad (4.1)$$

On cherche dans cette section la forme la plus générale d'un opérateur d'entrelacement A , c'est-à-d. la solution générale de l'équation

$$T(g)A = AT(g). \quad (4.2)$$

Dans une base bien choisie, les opérateurs $T(g)$ de la représentation sont diagonaux par blocs,

$$T(g) = \begin{pmatrix} T^1(g) & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots & T^1(g) & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & T^2(g) & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & T^2(g) & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & T^k(g) & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & T^k(g) \end{pmatrix}, \quad (4.3)$$

(la représentation irréductible $T^i(g)$ apparaît m_i fois et est de taille $n_i \times n_i$ où n_i est la dimension de la représentation T^i). Regroupons les représentations

irréductibles équivalentes,

$$T(g) = \begin{pmatrix} \tilde{T}^1(g) & 0 & \cdots & \cdots \\ 0 & \tilde{T}^2(g) & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \tilde{T}^k(g) \end{pmatrix}, \quad (4.4)$$

où $\tilde{T}^i(g)$ contient m_i fois $T^i(g)$,

$$\tilde{T}^i(g) = \begin{pmatrix} T^i(g) & 0 & \cdots & \cdots \\ 0 & T^i(g) & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & T^i(g) \end{pmatrix} \quad (4.5)$$

(matrice de taille $m_i n_i \times m_i n_i$).

Examinons d'abord ce qu'implique la condition (4.2) sur les blocs non diagonaux de A en supposant pour simplifier l'écriture que $T(g)$ se réduit à

$$T(g) = \begin{pmatrix} \tilde{T}^1(g) & 0 \\ 0 & \tilde{T}^2(g) \end{pmatrix}, \quad (4.6)$$

le cas général étant une généralisation immédiate. Posant

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \quad (4.7)$$

(où α est une matrice $m_1 n_1 \times m_1 n_1$, β est une matrice $m_1 n_1 \times m_2 n_2$, γ est une matrice $m_2 n_2 \times m_1 n_1$ et δ est une matrice $m_2 n_2 \times m_2 n_2$), on trouve

$$\tilde{T}^1(g)\alpha = \alpha\tilde{T}^1(g), \quad (4.8)$$

$$\tilde{T}^1(g)\beta = \beta\tilde{T}^2(g), \quad (4.9)$$

$$\tilde{T}^2(g)\gamma = \gamma\tilde{T}^1(g), \quad (4.10)$$

$$\tilde{T}^2(g)\delta = \delta\tilde{T}^2(g). \quad (4.11)$$

Les opérateurs β et γ sont des opérateurs d'entrelacement entre $\tilde{T}^1(g)$ et $\tilde{T}^2(g)$ et sont donc nuls. Par exemple, en écrivant explicitement l'équation pour β , avec

$$\tilde{T}^1(g) = \begin{pmatrix} T^1(g) & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & T^1(g) \end{pmatrix}, \quad \tilde{T}^2(g) = \begin{pmatrix} T^2(g) & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & T^2(g) \end{pmatrix}, \quad (4.12)$$

$$\beta = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \cdots & \beta_{1m_2} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \beta_{m_1 1} & \cdots & \beta_{m_1 m_2} \end{pmatrix} \quad (4.13)$$

(chaque bloc $\beta_{i\alpha}$ où $i = 1, \dots, m_1$ et $\alpha = 1, \dots, m_2$ est de taille $n_1 \times n_2$), on obtient les conditions d'entrelacement

$$T^1(g)\beta_{i\alpha} = \beta_{i\alpha}T^2(g) \quad (4.14)$$

qui impliquent $\beta_{i\alpha} = 0$ par le lemme de Schur car T^1 et T^2 sont des représentations irréductibles inéquivalentes. On arrive à la même conclusion pour γ . Donc, A prend la forme

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix} \quad (4.15)$$

Examinons à présent la condition (4.8) pour α . A cet effet, on observe que $\tilde{T}^1(g) = T^1(g) \otimes I_{m_1 \times m_1}$, i.e., $(\tilde{T}^1)_{iA,jB} = (T^1)_{ij} \delta_{AB}$ ($i, j = 1, \dots, n_1$, $A, B = 1, \dots, m_1$). Soit B_{AB} ($A, B = 1, \dots, m_1$) une base des matrices $m_1 \times m_1$. On peut prendre par exemple $(B_{AB})_{CD} = \delta_{AC} \delta_{BD}$. La matrice α peut s'écrire $\alpha = \sum_{A,B} \mu_{AB} \otimes B_{AB}$ où les matrices $n_1 \times n_1$ μ_{AB} sont données par

$$(\mu_{CD})_{ij} = (\alpha)_{iC,jD} \Leftrightarrow (\alpha)_{iC,jD} = \sum_{A,B} (\mu_{AB} \otimes B_{AB})_{iC,jD}.$$

La condition de commutation $[\alpha, \tilde{T}^1(g)] = 0$ donne $\sum_{A,B} [\mu_{AB}, T^1(g)] \otimes B_{AB} = 0$ et donc $[\mu_{AB}, T^1(g)] = 0$. Ceci implique, par le lemme de Schur, $\mu_{AB} = \lambda_{AB} I_{n_1 \times n_1}$ pour certains nombres λ_{AB} . Injectant ce résultat dans α , on obtient

$$\alpha = I_{n_1 \times n_1} \otimes B \quad (4.16)$$

où la matrice $m_1 \times m_1$ B est donnée par $B = \sum_{A,B} \lambda_{AB} B_{AB}$. La symétrie implique que pour connaître les $(m_1 n_1)^2$ éléments de matrice de α , il suffit de connaître les $(m_1)^2$ éléments de matrice de B .

Revenant à $T(g)$ écrit sous la forme (4.4), on en conclut, en utilisant les résultats précédents, que A est diagonale par blocs,

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & \cdots \\ 0 & A_2 & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_k \end{pmatrix}, \quad (4.17)$$

où

$$A_i = I_{n_i \times n_i} \otimes B_i \quad (4.18)$$

Par conséquent, pour connaître les $(\sum_i n_i m_i)^2$ éléments de matrice de A , il suffit de connaître les $\sum_i (m_i)^2$ éléments de matrice des B_i car A se réduit à (4.17) avec (4.18). C'est la conséquence de la symétrie.

4.2 Coefficients de Clebsch-Gordan

Soient T^p et T^q deux représentations irréductibles unitaires d'un groupe G . Le produit tensoriel $T \equiv T^p \otimes T^q$ se décompose en représentations irréductibles unitaires,

$$T^p \otimes T^q = \oplus_r m_r^{pq} T^r \quad (4.19)$$

où les m_r^{pq} sont les multiplicités.

Soient $\{\phi_j^p\}$ ($j = 1, \dots, n_p$), $\{\psi_k^q\}$ ($k = 1, \dots, n_q$) et $\{\theta_l^{r,\alpha}\}$ ($l = 1, \dots, n_r$; $\alpha = 1, \dots, m^{p q}_r$) des bases orthonormées (= unitaires) des sous-espaces invariants X^p , X^q et $X^{r,\alpha}$ associés aux représentations irréductibles T^p , T^q et T^r , respectivement (comme T^r apparaît $m^{p q}_r$ fois, il y a $m^{p q}_r$ copies de X^r paramétrisées par l'indice α). On a

$$T(g)\phi_j^p = \sum_{i=1}^{n_p} (T^p(g))_{ij} \phi_i^p, \quad (4.20)$$

$$T(g)\psi_k^q = \sum_{m=1}^{n_q} (T^q(g))_{mk} \phi_m^q, \quad (4.21)$$

$$T(g)\theta_l^{r,\alpha} = \sum_{u=1}^{n_r} (T^r(g))_{ul} \theta_u^{r,\alpha}. \quad (4.22)$$

Les vecteurs $\phi_j^p \otimes \psi_k^q \equiv \phi_j^p \psi_k^q$ forment une base de l'espace $X^p \otimes X^q$ à $n_p n_q$ dimensions. Les $\theta_l^{r,\alpha}$ aussi puisque

$$X^p \otimes X^q = \bigoplus_r \left(\bigoplus_{\alpha=1}^{m^{p q}_r} X^{r,\alpha} \right).$$

On a donc

$$\theta_l^{r,\alpha} = \sum_{j=1}^{n_p} \sum_{k=1}^{n_q} \left(\begin{matrix} p & q \\ j & k \end{matrix} \middle| \begin{matrix} r, \alpha \\ l \end{matrix} \right) \phi_j^p \psi_k^q \quad (4.23)$$

Les coefficients $\left(\begin{matrix} p & q \\ j & k \end{matrix} \middle| \begin{matrix} r, \alpha \\ l \end{matrix} \right)$ sont appelés coefficients de Clebsch-Gordan et forment les composantes d'une matrice inversible $n_p n_q \times n_p n_q$. Les formules du changement de base inverse sont

$$\phi_j^p \psi_k^q = \sum_r \sum_{\alpha=1}^{m^{p q}_r} \sum_{l=1}^{n_r} \left(\begin{matrix} r, \alpha \\ l \end{matrix} \middle| \begin{matrix} p & q \\ j & k \end{matrix} \right) \theta_l^{r,\alpha} \quad (4.24)$$

où les $\left(\begin{matrix} r, \alpha \\ l \end{matrix} \middle| \begin{matrix} p & q \\ j & k \end{matrix} \right)$ sont les composantes de la matrice $n_p n_q \times n_p n_q$ inverse de celle définie par les coefficients de Clebsch-Gordan. Comme les bases sont unitaires, on a

$$\left(\begin{matrix} r, \alpha \\ l \end{matrix} \middle| \begin{matrix} p & q \\ j & k \end{matrix} \right) = \left(\begin{matrix} p & q \\ j & k \end{matrix} \middle| \begin{matrix} r, \alpha \\ l \end{matrix} \right)^* . \quad (4.25)$$

Supposons le groupe G fini, d'ordre n . Soit \mathcal{P}_{ul}^r l'opérateur défini par

$$\mathcal{P}_{ul}^r = \frac{n_r}{n} \sum_{g \in G} (T^r(g))_{ul}^* T(g) \quad (4.26)$$

Theorem : On a

$$\mathcal{P}_{ul}^r \phi_j^p = 0, \quad \mathcal{P}_{ul}^r \psi_k^q = 0, \quad (4.27)$$

$$\mathcal{P}_{ul}^r \theta_v^{r,\alpha} = \delta_{lv} \theta_u^{r,\alpha} \quad (4.28)$$

(On suppose T^p et T^q inéquivalentes à T^r ; sinon on a des relations du type (4.28) pour T^p ou T^q .)

Démonstration : Ceci découle directement des relations d'orthogonalité et des formules (4.20), (4.21) et (4.22). A noter que pour les groupes de Lie compacts, on a des formules analogues ; il faut dans ce cas remplacer les sommes sur les éléments du groupe par l'intégrale invariante sur le groupe. Il résulte du théorème que les \mathcal{P}_{uu}^r projettent sur l'espace engendré par les vecteurs $\theta_u^{r,\alpha}$.

Theorem : Les coefficients de Clebsch-Gordon satisfont à la relation

$$\sum_{\alpha=1}^{m^{pq}_r} \begin{pmatrix} p & q & r \\ s & t & u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & q & r \\ j & k & l \end{pmatrix}^* = \frac{n_r}{n} \sum_{g \in G} (T^p(g))_{sj} (T^q(g))_{tk} (T^r(g))_{ul}^*. \quad (4.29)$$

Démonstration : On applique \mathcal{P}_{ul}^r à (4.24). On obtient

$$\mathcal{P}_{ul}^r (\phi_j^p \psi_k^q) = \sum_{\alpha=1}^{m^{pq}_r} \begin{pmatrix} r & \alpha \\ l & j & k \end{pmatrix} \theta_u^{r,\alpha}.$$

Injectant ensuite (4.23), on tire

$$\mathcal{P}_{ul}^r (\phi_j^p \psi_k^q) = \sum_{s=1}^{n_p} \sum_{t=1}^{n_q} \sum_{\alpha=1}^{m^{pq}_r} \begin{pmatrix} r & \alpha \\ l & j & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & q & r \\ s & t & u \end{pmatrix} \phi_s^p \psi_t^q \quad (4.30)$$

Mais d'autre part, par définition (4.26) de \mathcal{P}_{ul}^r et du produit tensoriel, on a :

$$\mathcal{P}_{ul}^r (\phi_j^p \psi_k^q) = \frac{n_r}{n} \sum_{s=1}^{n_p} \sum_{t=1}^{n_q} \sum_{g \in G} (T^p(g))_{sj} (T^q(g))_{tk} (T^r(g))^*_{ul} \phi_s^p \psi_t^q \quad (4.31)$$

Le théorème découle de la comparaison de (4.30) avec (4.31), en utilisant l'unitarité (4.25) et l'indépendance linéaire des $\phi_s^p \psi_t^q$. Dans le cas des groupes de Lie compacts, on a la même relation (remplacer la somme sur $g \in G$ par l'intégrale invariante sur G).

4.3 Opérateurs tensoriels irréductibles : définition

Soient G un groupe et T une représentation de G dans l'espace vectoriel X . On dit les opérateurs $O_k^q \in GL(X)$ (q fixé, $k = 1, \dots, n_q$) forment un opérateur tensoriel irréductible ssi les O_k^q se transforment selon la représentation irréductible T^q de G . Plus précisément

$$T(g) O_k^q (T(g))^{-1} = \sum_{m=1}^{n_q} (T^q(g))_{mk} O_m^q \quad (4.32)$$

où les $(T^q(g))_{mk}$ sont les éléments de matrice des opérateurs de la représentation T^q .

Si G est un groupe de Lie d'algèbre de Lie \mathcal{G} , $s(x)$ la représentation de \mathcal{G} correspondant à T et s^q celle correspondant à T^q , alors la relation (4.32) implique

$$[s(x), O_k^q] = \sum_{m=1}^{n_q} (s^q(x))_{mk} O_m^q \quad (4.33)$$

Exemple 1 : si T^q est la représentation triviale à une dimension, $O_k^q \equiv O$ et les équations ci-dessus se réduisent à

$$T(g)O(T(g))^{-1} = 0 \iff [T(g), O] = 0 \quad (4.34)$$

$$[s(x), O] = 0 \quad (4.35)$$

O est un opérateur qui entrelace T avec T .

Exemple 2 : l'opérateur de position \mathbf{r} est un opérateur tensoriel qui se transforme dans la représentation vectorielle (D_1) de $SO(3)$,

$$[J_a, r_b] = \epsilon_{acd}[r_c p_d, r_b] = -i\epsilon_{acb}r_c, \quad (4.36)$$

qui est bien la loi de transformation d'un vecteur.

4.4 Théorème de Wigner-Eckart

Le théorème de Wigner-Eckart généralise aux opérateurs tensoriels irréductibles ce que nous avons vu pour les opérateurs d'entrelacement : les conditions de symétrie permettent d'exprimer les éléments de matrice d'un opérateur tensoriel irréductible en terme d'un petit nombre "d'éléments de matrice réduits".

Théorème de Wigner-Eckart : Soient G un groupe fini ou un groupe de Lie compact et T une représentation unitaire de G dans l'espace vectoriel X . Supposons que T contienne les représentations irréductibles T^p et T^r de dimensions n_p et n_r (avec une multiplicité qui peut être plus grande que 1). Soient X^p et X^r des sous-espaces invariants irréductibles associés à T^p et T^r et $\{\phi_j^p\}$ ($j = 1, \dots, n_p$) et $\{\psi_l^r\}$ ($l = 1, \dots, n_r$) des bases orthonormées des espaces X^p et X^r . Soit O_k^q un opérateur tensoriel irréductible se transformant dans la représentation T^q (voir (4.32)). On note comme précédemment m^{pq}_r la multiplicité de T^r dans $T^p \otimes T^q$. On a

$$(\psi_l^r, O_k^q \phi_j^p) = \sum_{\alpha=1}^{m^{pq}_r} \left(\begin{matrix} p & q \\ j & k \end{matrix} \middle| \begin{matrix} r \\ l \end{matrix}, \alpha \right)^* (r|O^q|p)_\alpha \quad (4.37)$$

où les $(r|O^q|p)_\alpha$ sont m^{pq}_r "éléments de matrice réduits" qui ne dépendent pas de j, k et l . La dépendance en j, k, l est entièrement donnée par les coefficients de Clebsch-Gordan.

Démonstration : Comme les opérateurs $T(g)$ sont unitaires, on a

$$\begin{aligned} (\psi_l^r, O_k^q \phi_j^p) &= (T(g)\psi_l^r, T(g)O_k^q \phi_j^p) \\ &= (T(g)\psi_l^r, T(g)O_k^q (T(g))^{-1} T(g)\phi_j^p) \\ &= \sum_{s=1}^{n_p} \sum_{t=1}^{n_q} \sum_{u=1}^{n_r} (T^p(g))_{sj} (T^q(g))_{tk} (T^r(g))_{ul}^* (\psi_u^r, O_t^q \phi_s^p) \end{aligned}$$

Supposons d'abord le groupe fini. Sommant sur $g \in G$, on obtient, utilisant l'unitarité des représentations,

$$n (\psi_l^r, O_k^q \phi_j^p) = \sum_{s=1}^{n_p} \sum_{t=1}^{n_q} \sum_{u=1}^{n_r} \sum_{g \in G} (T^p(g))_{sj} (T^q(g))_{tk} (T^r(g))_{ul}^* (\psi_u^r, O_t^q \phi_s^p) \quad (4.38)$$

d'où on tire, grâce à (4.29), la relation cherchée,

$$(\psi_l^r, O_k^q \phi_j^p) = \sum_{\alpha=1}^{m^{pq}_r} \left(\begin{matrix} p & q \\ j & k \end{matrix} \middle| \begin{matrix} r, \alpha \\ l \end{matrix} \right)^* (r|O^q|p)_\alpha \quad (4.39)$$

où les $(r|O^q|p)_\alpha$ sont donnés par

$$(r|O^q|p)_\alpha = \frac{1}{n_r} \sum_{s=1}^{n_p} \sum_{t=1}^{n_q} \sum_{u=1}^{n_r} \left(\begin{matrix} p & q \\ s & t \end{matrix} \middle| \begin{matrix} r, \alpha \\ u \end{matrix} \right) (\psi_u^r, O_t^q \phi_s^p) \quad (4.40)$$

On obtient le même résultat dans le cas des groupes de Lie compacts en utilisant l'intégration invariante.

On observe en particulier que l'élément de matrice $(\psi_l^r, O_k^q \phi_j^p)$ n'est non nul que si le produit tensoriel $T^p \otimes T^q$ contient la représentation T^r dans sa décomposition ($m^{pq}_r \neq 0$) et que le nombre de constantes non déterminées par la théorie des groupes dans $(\psi_l^r, O_k^q \phi_j^p)$ (éléments de matrice réduits) est égal à la multiplicité de T^r dans $T^p \otimes T^q$.

4.5 Application : Emission électromagnétique et règles de sélection

Considérons l'émission de rayonnement électromagnétique par un noyau (émission γ),

$$\mathcal{N}^* \longrightarrow \mathcal{N} + \gamma \quad (4.41)$$

où \mathcal{N}^* est un état excité d'un noyau et \mathcal{N} son état fondamental. Soient j, j' les moments cinétiques totaux de \mathcal{N} et \mathcal{N}^* . On montre que l'amplitude de probabilité peut s'exprimer en terme d'éléments de matrice de la forme

$$\langle \tau, j, m | T_k^q | \tau', j', m' \rangle \quad (4.42)$$

où τ désigne les nombres quantiques supplémentaires nécessaires pour spécifier l'état et où T_k^q sont des opérateurs tensoriels irréductibles (moments multipolaires - plus précisément 2^q -polaires - électriques et magnétiques).

D'après le théorème de Wigner-Eckart, la contribution (4.42) est égale à

$$\langle \tau, j, m | T_k^q | \tau', j', m' \rangle = \langle j, m | j', q; m', k \rangle \langle \tau, j | T^q | \tau', j' \rangle \quad (4.43)$$

où les $\langle \tau, j | T^q | \tau', j' \rangle$ sont les éléments de matrice réduits. Toute la dépendance en les nombres quantiques m, m' et k est donc entièrement contenue dans les coefficients de Clebsch-Gordan $\langle j, m | j', q; m', k \rangle$ pour $SU(2)$ qui apparaissent dans la décomposition

$$|j', m'\rangle \otimes |q, k\rangle \equiv |j', q; m', k\rangle = \sum_{j, m} \langle j, m | j', q; m', k \rangle |j, m\rangle \quad (4.44)$$

(il n'y a pas de multiplicité non triviale dans ce cas). En particulier, on a les règles de sélection :

1. La contribution multipolaire $\langle \tau, j, m | T_k^q | \tau', j', m' \rangle$ est nulle si $m \neq k + m'$
2. La contribution multipolaire $\langle \tau, j, m | T_k^q | \tau', j', m' \rangle$ est nulle si q viole les inégalités $|j - j'| \leq q \leq j + j'$.

(Rappel : la probabilité est donnée par $\langle \tau, j, m | T_k^q | \tau', j', m' \rangle \langle \tau', j', m' | (T_k^q)^\dagger | \tau, j, m \rangle$ et les deux facteurs doivent être non nuls.)

Chapitre 5

Représentations des algèbres de Lie compactes

5.1 Définitions

5.1.1 Rappels

Algèbres de Lie

Une algèbre de Lie (réelle) est un espace vectoriel (réel) L muni d'une opération "crochet de Lie" $[\cdot, \cdot] : L \times L \rightarrow L$ qui jouit des propriétés suivantes :

1. $[ax + by, z] = a[x, z] + b[y, z]$ pour tous $x, y, z \in L$ et $a, b \in \mathbb{R}$;
2. $[x, y] = -[y, x]$ pour tous $x, y \in L$; et
3. $[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$ pour tous $x, y, z \in L$ ("identité de Jacobi").

Les algèbres de Lie considérées ici sont des algèbres de Lie de matrices, pour lesquelles le crochet de Lie est le commutateur,

$$[x, y] = xy - yx \quad (5.1)$$

Bien que nous ne considérons ici que des algèbres de Lie réelles, nous serons amenés à considérer des combinaisons linéaires à coefficients complexes des éléments de l'algèbre ; la structure de crochet s'étend par linéarité.

Constantes de structure

Soit $\{X_a\}$ une base de L . On a

$$[X_a, X_b] = C_{ab}^c X_c. \quad (5.2)$$

Les nombres $C_{ab}^c = -C_{ba}^c$ sont appelés "constantes de structure" et satisfont à

$$C_{ab}^e C_{ce}^d + C_{bc}^e C_{ae}^d + C_{ca}^e C_{be}^d = 0 \quad (5.3)$$

en vertu de l'identité de Jacobi.

Représentations

Une représentation de L est une application linéaire s de L dans¹ $GL(X)$ qui préserve le commutateur,

$$s(ax + by) = as(x) + bs(y) \quad \forall x, y \in L, \quad \forall a, b \in \mathbb{R} \quad (5.4)$$

$$s([x, y]) = [s(x), s(y)] \quad \forall x, y \in L \quad (5.5)$$

Représentation adjointe

La représentation adjointe agit dans l'espace vectoriel L lui-même selon la loi

$$ad_y(x) = [y, x] \quad (5.6)$$

Les matrices de la représentation adjointe ont pour éléments de matrice les constantes de structure,

$$(ad_{X_a})^c_b = C^c_{ab} \quad (5.7)$$

La représentation adjointe ad de l'algèbre est la représentation associée à la représentation adjointe Ad du groupe de Lie correspondant, $Ad_g(x) = gxg^{-1}$, $ad_y(x) = \frac{d}{dt}(\exp(yt)x \exp(-yt))|_{t=0}$.

5.1.2 Idéal

Soit K un sous-espace vectoriel de L . On dit que K est un idéal de L ssi $[K, L] \subset K$. Dans ce cas, l'espace vectoriel quotient L/K hérite d'une structure d'algèbre de Lie bien définie.

Les sous-espaces $\{0\}$ et L sont des idéaux. On les appelle "idéaux triviaux". Une algèbre de Lie est *simple* ssi elle n'est pas abélienne et ne possède pas d'idéal non trivial². Une algèbre de Lie est *semi-simple* ssi elle n'est pas égale à $u(1)$ et ne possède pas d'idéal abélien non trivial.

Theorem 5.1.1. *La représentation adjointe d'une algèbre de Lie simple L est irréductible et fidèle.*

Démonstration : (i) La représentation adjointe est irréductible. En effet, soit M un sous-espace invariant. La condition d'invariance est équivalente pour la représentation adjointe à $ad_y x \in M \quad \forall x \in M, \quad \forall y \in L$, c'-à-d., $[y, x] \in M \quad \forall x \in M, \quad \forall y \in L$, ce qui montre que M est un idéal, qui doit nécessairement être trivial (L est simple).

(ii) La représentation adjointe est fidèle. En effet, supposons $ad_x = 0$ pour $x \in L$. Alors, $[x, y] = 0 \quad \forall y \in L$, ce qui montre que $\mathbb{R}x$ est un idéal abélien. On en déduit que $x = 0$ ou $\mathbb{R}x = L$, mais ce second cas n'est pas possible car L est simple. \square

1. Rappelons que $GL(X)$ est l'ensemble des opérateurs linéaires inversibles $X \rightarrow X$; X est ici un espace vectoriel que nous supposons toujours de dimension finie.

2. L'algèbre abélienne à une dimension $u(1)$ n'est donc pas une algèbre de Lie simple.

A noter qu'inversément, si la représentation adjointe est irréductible, il n'y a pas d'idéal non trivial (ceux-ci définissent des sous-espaces invariants) et l'algèbre est simple si elle est de dimension > 1 (en dimension 1, la seule algèbre de Lie est l'algèbre abélienne $u(1)$).

5.1.3 Forme bilinéaire symétrique invariante

On appelle forme bilinéaire symétrique invariante sur L toute forme bilinéaire symétrique $g : L \times L \rightarrow \mathbb{C}$ telle que

$$g([x, y], z) = g(x, [y, z]). \quad (5.8)$$

Un exemple est donné par la forme de Killing,

$$k(x, y) = Tr(ad_x ad_y) = Tr(ad_y ad_x) \quad (5.9)$$

De manière générale, si s est une représentation de L , la forme bilinéaire symétrique

$$\beta_s(x, y) = tr(s(x) s(y)) \quad (5.10)$$

est invariante car

$$tr(s[x, y] s(z)) = tr([s(x), s(y)] s(z)) = tr((s(x)s(y) - s(y)s(x))s(z))$$

en vertu de la propriété cyclique de la trace. En particulier, si L est une algèbre de Lie de matrices (ce que nous supposons toujours), la forme bilinéaire symétrique

$$\alpha(x, y) = tr(xy) \quad (5.11)$$

est définie et est invariante.

Pour une algèbre de Lie réelle quelconque et une représentation quelconque, la forme bilinéaire symétrique β_s n'est pas nécessairement réelle. Par exemple, la représentation à une dimension $s : \lambda x \rightarrow \lambda(1+i)$ (opérateur de multiplication par $\lambda(1+i)$, $\lambda \in \mathbb{R}$) de l'algèbre abélienne réelle à une dimension $\mathbb{R}x$ conduit à $\beta_s(x, x) = tr(s(x) s(x)) = 2i$. La forme de Killing est cependant toujours réelle.

On appelle radical R_g de la forme bilinéaire symétrique invariante g l'ensemble des éléments de L tels que $g(x, y) = 0 \quad \forall y \in L$. Le radical R_g est un idéal car si $x \in R_g$, $y, z \in L$, on a $g([x, y], z) = g(x, [y, z]) = 0$ et donc $[x, y] \in R_g$.

5.1.4 Algèbres de Lie compactes

Si un groupe de Lie est compact, on peut supposer que ses représentations sont unitaires. En particulier, les matrices d'un groupe de Lie compact matriciel peuvent elles-mêmes être supposées unitaires. Les matrices de l'algèbre de Lie correspondante sont alors antihermitiennes. Dans ce cas, la forme bilinéaire invariante $\alpha(x, y) = tr(xy)$ est clairement définie négative car $tr(xx) = -tr(x^\dagger x) = \sum_{ij} |x_{ij}|^2 \leq 0$ avec $tr(xx) = 0$ ssi $x = 0$. De manière générale, la forme bilinéaire

symétrique invariante associée à une représentation unitaire (par des matrices antihermitiennes) est réelle et définie semi-négative,

$$\begin{aligned}(\beta_s(x, y))^* &= \text{tr}(s(x)^* s(y)^*) = \text{tr}(s(y)^\dagger s(x)^\dagger) = \text{tr}(s(x) s(y)) = \beta_s(x, y) \\ \beta_s(x, x) &= \text{tr}(s(x) s(x)) = -\text{tr}(s(x)^\dagger s(x)) \leq 0\end{aligned}$$

avec égalité ssi $s(x) = 0$, ce qui implique $x = 0$ ssi s est fidèle. En particulier, pour une algèbre simple, la forme de Killing est définie négative.

On dit qu'une algèbre de Lie de matrices est compacte ssi c'est une sous-algèbre de $u(N)$. On peut montrer que cette définition est équivalente à la condition que $\alpha(x, y)$ soit définie négative. On peut aussi montrer que toute algèbre de Lie compacte est isomorphe à la somme directe d'algèbres de Lie simples compactes et d'un certain nombre d'algèbres $u(1)$ (ces résultats ne seront pas démontrés ici). D'où l'intérêt de classer les algèbres de Lie simples compactes.

Dans la suite du cours, on ne considèrera pour la simplicité que les algèbres de Lie compactes (la théorie des algèbres de Lie a été développée avec succès dans un cadre beaucoup plus général ... mais c'est une étude qui va au-delà des ambitions du cours). De même, on ne considèrera que des représentations unitaires de l'algèbre (par des matrices antihermitiennes).

On a :

Theorème 5.1.2. *La forme bilinéaire symétrique invariante d'une algèbre de Lie simple compacte est unique à un facteur multiplicatif près.*

Démonstration : Soit g une forme bilinéaire symétrique invariante de l'algèbre de Lie simple compacte L , k sa forme de Killing. On peut supposer sans nuire à la généralité $k = I$. La forme bilinéaire symétrique $u = g - \lambda k = g - \lambda I$ est invariante pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$. Prenons $\lambda \in \mathbb{R}$ valeur propre de g , $\det(g - \lambda I) = 0$. Alors, la forme bilinéaire invariante u est dégénérée et donc son radical est nécessairement tout L , $u = 0$. Ceci implique $g = \lambda k$. \square

5.1.5 Conventions des physiciens

En physique, il est de tradition de redéfinir les éléments des algèbres de Lie compactes en les multipliant par i , ce qui donne des matrices hermitiennes, dont les valeurs propres sont réelles. Multiplier les générateurs par i est permis si on passe à la complexification de l'algèbre, comme nous le ferons ici. Ce sont ces générateurs redéfinis qui sont observables. On a ainsi $x^\dagger = x$ et

$$[X_a, X_b] = iC_{ab}^c X_c \tag{5.12}$$

(après redéfinition) et la forme bilinéaire invariante $\text{tr}(xy)$ est définie positive dans l'espace des combinaisons linéaires à coefficients réels des X_a , où elle définit donc un produit scalaire (de signature euclidienne).

Il est commode de normaliser le produit scalaire de manière à ce que les matrices simples aient des produits scalaires simples. Par exemple, pour $so(3)$,

les générateurs standards $X_i = iO_i$,

$$X_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad X_3 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

sont tels que $tr X_i X_j = 2\delta_{ij}$. On peut absorber le facteur 2 dans une normalisation du produit scalaire si on le souhaite.

De manière générale, on définit $(x, y) = (\lambda)^{-1}tr(xy)$ où λ est un nombre réel positif dont la valeur est choisie selon la commodité. On étend ce produit scalaire en un produit scalaire hermitien par la formule

$$(x, y) = \frac{1}{\lambda}tr(x^\dagger y) \quad (5.13)$$

pour des combinaisons linéaires à coefficients complexes des X_a . On peut choisir la base de telle sorte que

$$tr(X_a X_b) = \lambda\delta_{ab} \quad (5.14)$$

(i.e., $(X_a, X_b) = \delta_{ab}$). On vérifie aisément que ad_x est un opérateur hermitien pour x hermitien ($(ad_x)^\dagger = ad_x$ si $x = x^\dagger$). En effet, $\lambda(ad_x y, z) = tr([x, y]^\dagger z) = tr([y^\dagger, x]z) = tr(y^\dagger [x, z]) = \lambda(y, ad_x z)$. La représentation adjointe est bien unitaire.

Il résulte du théorème précédent qu'avec le choix (5.14), la forme de Killing des algèbres simples compactes est donnée par

$$k_{ab} = tr(ad_{X_a} ad_{X_b}) = \rho\delta_{ab} \quad (5.15)$$

où ρ est un nombre strictement positif.

5.2 Sous-algèbres de Cartan – Poids d'une représentation

La classification des algèbres de Lie simples compactes et l'étude de leurs représentations se font en diagonalisant simultanément un nombre maximum d'éléments de l'algèbre qui commutent.

On appelle sous-algèbre de Cartan H une sous-algèbre abélienne maximale de L (c'-à-d., non contenue dans une sous-algèbre abélienne plus grande). Soit $\{h_i\}$, $i = 1, \dots, r$, une base de H . On a

$$h_i = h_i^\dagger, \quad [h_i, h_j] = 0 \quad (5.16)$$

Il est commode de choisir une base orthonormée

$$(h_i, h_j) = \frac{1}{\lambda}tr(h_i h_j) = \delta_{ij}. \quad (5.17)$$

[Les sous-algèbres de Cartan sont uniques à un isomorphisme près.] La dimension des sous-algèbres de Cartan est appelée le rang de l'algèbre L .

Soit s une représentation irréductible de l'algèbre de Lie simple compacte L . Les "générateurs de Cartan" h_i sont diagonalisables puisqu'hermitiens ; leurs valeurs propres sont réelles. Dans toute représentation s , les opérateurs $s(h_i)$ – que l'on continue à noter h_i en laissant tomber le "s" – sont aussi hermitiens et donc diagonalisables. L'espace de la représentation se décompose en somme directe de sous-espaces propres. Soit $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_r)$ un des ensembles de valeurs propres apparaissant dans la représentation s et $f_{\mu,A}$ les vecteurs propres correspondants,

$$h_i(f_{\mu,A}) = \mu_i f_{\mu,A} \quad (5.18)$$

(l'indice supplémentaire A est nécessaire si μ est dégénérée). Si $h = \sum_{i=1}^r a_i h_i$ est un élément de la sous-algèbre de Cartan, $f_{\mu,A}$ est vecteur propre de h pour la valeur propre $\mu(h) = \sum_i a_i \mu_i$,

$$h(f_{\mu,A}) = \mu(h) f_{\mu,A}, \quad h \in H. \quad (5.19)$$

Il est donc commode de voir μ comme un élément du dual H^* de la sous-algèbre de Cartan H . On appelle *poids* de la représentation s tout élément μ du dual H^* de H , $\mu \in H^*$, tel qu'il existe (au moins) un vecteur non-nul de la représentation s pour lequel on a (5.19).

5.3 Représentation adjointe - Racines

Dans le cas de la représentation adjointe, les poids non-nuls portent le nom de *racines*. Les éléments de H sont de poids nuls,

$$ad_h(h_i) = [h, h_i] = 0, \quad h \in H \quad (5.20)$$

et il n'y en a pas d'autre vecteur propre correspondant à $\mu = 0$ car H est maximale. Le poids zéro est dégénéré r fois. Soit e_α un vecteur propre associé à la racine α ,

$$ad_h(e_\alpha) = [h, e_\alpha] = \alpha(h) e_\alpha \quad (5.21)$$

(on verra que les racines sont non dégénérées, ce qui est anticipé dans la notation).

Theorème 5.3.1. *Si $\alpha \in H^*$ est une racine, alors $-\alpha$ est aussi une racine.*

En effet, on a

$$[h, e_\alpha]^\dagger = -[h, e_\alpha^\dagger] = \alpha(h) e_\alpha^\dagger$$

et donc

$$ad_h(e_\alpha^\dagger) = [h, e_\alpha^\dagger] = -\alpha(h) e_\alpha^\dagger \quad (5.22)$$

On peut ainsi prendre $e_{-\alpha} = e_\alpha^\dagger$. Les vecteurs propres correspondant à des valeurs propres distinctes sont orthogonaux. On normalise les e_α de manière à avoir

$$(e_\alpha, e_\beta) = \frac{1}{\lambda} tr(e_\alpha^\dagger e_\beta) = \delta_{\alpha\beta} \quad (= \prod_i \delta_{\alpha_i \beta_i}) \quad (5.23)$$

Soit $\pm\alpha$ une paire de racines et $e_{\pm\alpha}$ les vecteurs propres correspondants. L'action des opérateurs $e_{\pm\alpha}$ sur un vecteur propre $f_{\mu,A}$ de la représentation s est facile à déterminer car

$$h(e_{\pm\alpha} f_{\mu,A}) = ([h, e_{\pm\alpha}] \pm e_{\pm\alpha} h) f_{\mu,A} = (\mu \pm \alpha)(h) (e_{\pm\alpha} f_{\mu,A}).$$

Par conséquent, si $e_{\pm\alpha} f_{\mu,A}$ n'est pas nul, c'est un vecteur propre pour le poids $\mu \pm \alpha$. Les opérateurs $e_{\pm\alpha}$ sont semblables aux opérateurs J^+ et J^- de $su(2)$, qui font monter ou descendre les valeurs propres de J^3 de une unité.

Ce résultat est en particulier vrai pour la représentation adjointe. Il en résulte immédiatement que le commutateur $[e_\alpha, e_{-\alpha}]$ est dans la sous-algèbre de Cartan car $ad_h([e_\alpha, e_{-\alpha}]) = (\alpha - \alpha)(h) [e_\alpha, e_{-\alpha}] = 0$. Donc, $[e_\alpha, e_{-\alpha}] = \sum_i \beta_i h_i$, où les coefficients β_i se calculent aisément,

$$\beta_i = (h_i, [e_\alpha, e_{-\alpha}]) = \frac{1}{\lambda} tr(h_i [e_\alpha, e_{-\alpha}]) = \frac{1}{\lambda} tr([h_i, e_\alpha] e_{-\alpha}) = \alpha_i tr(e_\alpha e_{-\alpha}) = \alpha_i.$$

On peut par conséquent écrire

$$[e_\alpha, e_{-\alpha}] = \alpha \cdot h \tag{5.24}$$

avec $\alpha \cdot h \equiv \sum_i \alpha_i h_i$. Cette relation se réduit pour $su(2)$ à $[J^+, J^-] = J^3$.

En normalisant bien les générateurs $e_\alpha, e_{-\alpha}$ et $\alpha \cdot h$, on peut en fait écrire les relations de commutation exactement sous la forme standard de $su(2)$. Posant

$$e^\pm \equiv |\alpha|^{-1} e_{\pm\alpha}, \quad e_3 \equiv |\alpha|^{-2} \alpha \cdot h \tag{5.25}$$

on obtient facilement

$$[e_3, e^\pm] = \pm e^\pm, \quad [e^+, e^-] = e^3 \tag{5.26}$$

A chaque paire de racines non nulles $\pm\alpha$ est donc associée une sous-algèbre $su(2)$. Toute représentation de L – et en particulier, l'algèbre de Lie L elle-même, c'-à-d. la représentation adjointe – se décompose en représentations irréductibles de chacune de ses sous-algèbres $su(2)$, qui sont connues en détail. Le générateur e^+ fait monter les poids de $+\alpha$, le générateur e^- fait descendre les poids de $-\alpha$.

Theorème 5.3.2. *Les racines (poids non nuls de la représentation adjointe) sont non dégénérées.*

Démonstration : Supposons qu'il y ait deux vecteurs propres e_α, e'_α associés à la racine α , $[h, e_\alpha] = \alpha(h) e_\alpha$, $[h, e'_\alpha] = \alpha(h) e'_\alpha$. On peut prendre e_α et e'_α orthogonaux,

$$(e_\alpha, e'_\alpha) = \frac{1}{\lambda} tr(e_\alpha^\dagger e'_\alpha) = \frac{1}{\lambda} tr(e_{-\alpha} e'_\alpha) = 0.$$

Les vecteurs e^-, e^3, e^+ forment un sous-espace invariant sous la $su(2)$ qu'ils engendrent (et se transforment dans la représentation adjointe - spin 1 - de ce $su(2)$).

D'autre part,

$$ad_{e^3}(e'_\alpha) = [e^3, e'_\alpha] = |\alpha|^{-2}\alpha \cdot [h, e'_\alpha] = e'_\alpha.$$

Donc e'_α possède spin +1 selon z . En agissant avec e^+ et e^- , on engendre un sous-espace invariant sous le $su(2)$ considéré, qui est l'espace d'une représentation de spin j de $su(2)$ pour un certain j entier.

Agissons avec $e^- \equiv |\alpha|^{-1}e_{-\alpha}$ sur e'_α . Le vecteur $[e^-, e'_\alpha]$ possède poids zéro et est donc dans la sous-algèbre de Cartan. Comme

$$(h_i, [e^-, e'_\alpha]) = \frac{1}{\lambda} \text{tr}(h_i[e^-, e'_\alpha]) = -\frac{1}{\lambda} \text{tr}(e^-[h_i, e'_\alpha]) = -\frac{\alpha_i}{\lambda} \text{tr}(e^- e'_\alpha) = 0,$$

on en déduit que $ad_{e^-}(e'_\alpha) = 0$: e'_α est un vecteur de spin minimum selon z d'une représentation de la sous-algèbre $su(2)$ engendrée par e^+, e^-, e^3 (e'_α est annihilé par e^-). Ceci est une contradiction car les valeurs minima du spin dans une représentation de spin j quelconque sont ≤ 0 (égales à $-j$). On en déduit qu'il n'y a pas de vecteur e'_α et que les racines sont par conséquent de multiplicité égale à 1. \square

Les racines étant non dégénérées, il n'est pas nécessaire d'introduire un indice supplémentaire pour caractériser les vecteurs e_α . On a également :

Theorème 5.3.3. *Les seuls multiples d'une racine α qui sont aussi une racine sont $\pm\alpha$.*

Démonstration : Soient α une racine et e^+, e^-, e^3 la sous-algèbre $su(2)$ associée. On a bien sûr $ad_{e^+}(e^+) = [e^+, e^+] = 0$: e^+ est un état de spin maximum, égal à 1. Supposons que $k\alpha$ soit une racine avec $k \neq 0$, $k \neq \pm 1$. On sait que k est un entier ou un demi-entier. Imaginons d'abord que k soit un entier. Alors $|k| \geq 2$ et le vecteur $e_{k\alpha}$ ferait partie d'une représentation de spin ≥ 2 , qui contiendrait un autre état de spin 1, c-à-d., un autre vecteur propre associé à la racine α , ce qui est impossible. Donc k ne peut être qu'un demi-entier. Mais si k est un demi-entier, il y a dans la représentation un état de spin $1/2$, $e_{\bar{\alpha}}$ avec $\bar{\alpha} = \frac{\alpha}{2}$. En considérant la sous-algèbre $su(2)$ correspondante et en répétant l'argument de ci-dessus, on arrive à une contradiction ($\alpha = 2\bar{\alpha}$). \square

5.4 Chaînes de racines

Examinons de plus près la manière dont le $su(2)$ engendré par e^+, e^- et e^3 agit dans une représentation s de l'algèbre de Lie (simple, compacte) L . Soient μ un poids quelconque de cette représentation et $f_{\mu,A}$ le vecteur propre correspondant. On a

$$e^3 f_{\mu,A} = \frac{\alpha \cdot \mu}{\alpha^2} f_{\mu,A}. \quad (5.27)$$

Comme les seules valeurs propres possibles de e^3 sont des entiers ou des demi-entiers, on en déduit que pour toute racine et pour tout poids,

$$\frac{2\alpha \cdot \mu}{\alpha^2} \in \mathbb{Z}. \quad (5.28)$$

Le vecteur $f_{\mu,A}$ peut être écrit comme combinaison linéaire de vecteurs de même spin $\frac{\alpha \cdot \mu}{\alpha^2}$ appartenant chacun à une représentation de spin bien défini. Supposons que le spin le plus grand qui apparaisse dans la décomposition soit j . Il existe alors un entier non-négatif p tel que

$$(e^+)^p f_{\mu,A} \neq 0, \quad (e^+)^{p+1} f_{\mu,A} = 0. \quad (5.29)$$

Le vecteur $(e^+)^p f_{\mu,A}$ a pour poids $\mu + p\alpha$ et, puisque c'est le vecteur de plus haut poids de la représentation de spin j du $su(2)$ considéré, on a

$$\frac{\alpha \cdot (\mu + p\alpha)}{\alpha^2} = \frac{\alpha \cdot \mu}{\alpha^2} + p = j. \quad (5.30)$$

De la même manière, il existe un entier non-négatif q tel que

$$(e^-)^q f_{\mu,A} \neq 0, \quad (e^-)^{q+1} f_{\mu,A} = 0. \quad (5.31)$$

Le vecteur $(e^-)^q f_{\mu,A}$ a pour poids $\mu - q\alpha$ et, puisque c'est le vecteur de plus bas poids de la représentation de spin j du $su(2)$ considéré, on a

$$\frac{\alpha \cdot (\mu - q\alpha)}{\alpha^2} = \frac{\alpha \cdot \mu}{\alpha^2} - q = -j. \quad (5.32)$$

On a ainsi une chaîne de poids $\mu - q\alpha, \mu - (q-1)\alpha, \dots, \mu, \dots, \mu + (p-1)\alpha, \mu + p\alpha$ qui apparaissent dans la représentation. Dans le cas de la représentation adjointe, on parle de chaîne de racines.

Ajoutant (5.30) à (5.32), on obtient

$$\frac{2\alpha \cdot \mu}{\alpha^2} + p - q = 0$$

ou encore

$$\frac{\alpha \cdot \mu}{\alpha^2} = -\frac{1}{2}(p - q). \quad (5.33)$$

Cette formule jouera un rôle clé par la suite.

Appliquons (5.33) à la représentation adjointe, avec $\mu \equiv \beta$ une racine. On a

$$\frac{\alpha \cdot \beta}{\alpha^2} = -\frac{1}{2}(p - q). \quad (5.34)$$

Si on considère le $su(2)$ associé à β , on obtient de la même façon

$$\frac{\beta \cdot \alpha}{\beta^2} = -\frac{1}{2}(p' - q'). \quad (5.35)$$

Multipliant ces deux équations donne une formule pour l'angle $\theta_{\alpha\beta}$ entre les racines α et β ,

$$\cos^2 \theta_{\alpha\beta} = \frac{(\alpha \cdot \beta)^2}{\alpha^2 \beta^2} = \frac{(p - q)(p' - q')}{4}. \quad (5.36)$$

Comme $(p - q)(p' - q')$ est un entier (non négatif) et que $0 \leq \cos^2 \theta_{\alpha\beta} \leq 1$, il n'existe que cinq possibilité pour $(p - q)(p' - q')$: 0, 1, 2, 3, 4. Le dernier cas

est trivial car il donne $\theta_{\alpha\beta} = 0$ ou π , ou encore $\beta = k\alpha$ et les seules possibilités sont $\beta = \pm\alpha$. Les autres cas conduisent à

$(p-q)(p'-q')$	$\theta_{\alpha\beta}$
0	$\frac{\pi}{2}$
1	$\frac{\pi}{3}$ ou $\frac{2\pi}{3}$
2	$\frac{\pi}{4}$ ou $\frac{3\pi}{4}$
3	$\frac{\pi}{6}$ ou $\frac{5\pi}{6}$

Les angles entre les racines sont donc remarquablement contraints.

5.5 Exemple : $su(3)$

5.5.1 Matrices de Gell-Mann

Une base de matrices 3×3 hermitiennes de trace nulle est donnée par les matrices de Gell-Mann,

$$\begin{aligned}
 \lambda_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \lambda_2 &= \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 \lambda_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \lambda_4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 \lambda_5 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix} & \lambda_6 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
 \lambda_7 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} & \lambda_8 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Traditionnellement, on prend comme générateurs de $su(3)$ les matrices

$$T_a = \frac{1}{2}\lambda_a \quad (5.37)$$

qui sont telles que

$$\text{tr}(T_a T_b) = \frac{1}{2}\delta_{ab}. \quad (5.38)$$

Le produit scalaire est normalisé de la manière suivante

$$(x, y) = 2 \text{tr}(x^\dagger y) \quad (5.39)$$

Les matrices T_3 et T_8 sont diagonales et par conséquent commutent. Il n'y a pas d'autre matrice de $su(3)$ qui commutent à la fois avec T_3 et T_8 . Ces deux matrices engendrent donc une sous-algèbre de Cartan de $su(3)$, qui est de rang 2. On note

$$h_1 \equiv T_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad h_2 \equiv T_8 = \frac{\sqrt{3}}{6} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}. \quad (5.40)$$

5.5.2 Poids de la représentation $\mathbf{3}$ qui définit $su(3)$

Les poids de la représentation à trois dimensions qui définit $su(3)$, notée $\mathbf{3}$, sont faciles à déterminer car les matrices T_3 et T_8 sont diagonales. Les vecteurs

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

sont vecteurs propres simultanés de $T_3 \equiv h_1$ et $T_8 \equiv h_2$ et donnent les poids suivants :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \left(\frac{1}{2} \quad \frac{\sqrt{3}}{6} \right) \quad (5.41)$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \left(-\frac{1}{2} \quad \frac{\sqrt{3}}{6} \right) \quad (5.42)$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \left(0 \quad -\frac{\sqrt{3}}{3} \right) \quad (5.43)$$

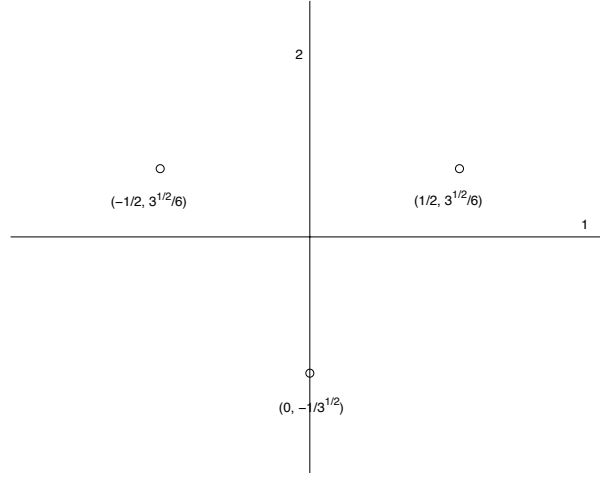
Ces 3 poids forment, dans H^* , les sommets d'un triangle équilatéral (voir Figure 5.1).

5.5.3 Poids de la représentation complexe conjuguée $\bar{\mathbf{3}}$

Les matrices de la représentation complexe conjuguée sont $-T_a^*$. En effet, les vrais générateurs de $su(3)$ sont anti-hermitiens et donnés par iT_a et quand on prend le complexe conjugué s'introduit donc un changement de signe. Une autre manière d'arriver à la même conclusion est d'observer que pour les représentations unitaires, la représentation complexe conjuguée ($x \rightarrow (s(x))^*$) est identique à la représentation duale ($x \rightarrow -(s(x))^t$) : les matrices symétriques changent de signe, les matrices antisymétriques sont invariantes.

Il en résulte que les poids de la représentation $\bar{\mathbf{3}}$ sont moins les poids de la représentation $\mathbf{3}$, puisque les h_i , étant symétriques, sont représentés par $-h_i$. Ceci donne les trois poids

$$\left(-\frac{1}{2} \quad -\frac{\sqrt{3}}{6} \right), \left(\frac{1}{2} \quad -\frac{\sqrt{3}}{6} \right), \left(0 \quad \frac{\sqrt{3}}{3} \right) \quad (5.44)$$

FIGURE 5.1 – Les trois poids de la représentation **3**.

A nouveau, les poids forment les sommets d'un triangle équilatéral dans H^* , voir Figure 5.1.

On notera que les représentations **3** et $\bar{\mathbf{3}}$ sont clairement inéquivalentes puisque les poids correspondants sont différents et qu'on ne peut changer les valeurs propres d'une matrice par changement de base. Les représentations **3** et $\bar{\mathbf{3}}$ sont complexes. Ceci contraste avec l'équivalence des représentations **2** et $\bar{\mathbf{2}}$ de $su(2)$ qui sont, comme nous l'avons vu, pseudo-réelles.

5.5.4 Racines de $su(3)$

Les poids de la représentation adjointe, notée aussi **8** car elle est à huit dimensions, sont également faciles à obtenir. Si D est une matrice diagonale, $D = \text{diag}(d_i)$ et N une matrice triangulaire supérieure (inférieure) avec des zéros partout sauf en position (i, j) ($i \neq j$), on a

$$[D, N] = (d_i - d_j)N.$$

Les matrices qui diagonalisent l'action adjointe de T_3 et T_8 sont donc (en normalisant selon les conventions de la section précédente,

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(T_1 \pm iT_2) \equiv e_{\pm 1, 0} \rightarrow \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.45)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(T_4 \pm iT_5) \equiv e_{\pm \frac{1}{2}, \pm \frac{\sqrt{3}}{2}} \rightarrow \pm \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad (5.46)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(T_6 \pm iT_7) \equiv e_{\mp \frac{1}{2}, \pm \frac{\sqrt{3}}{2}} \rightarrow \pm \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad (5.47)$$

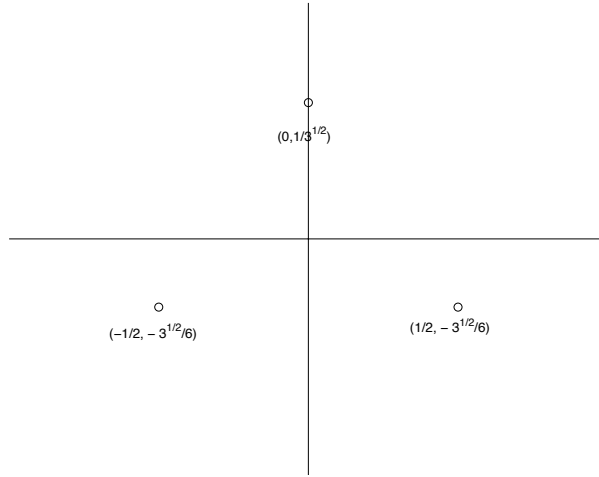


FIGURE 5.2 – Les trois poids de la représentation $\bar{\mathbf{3}}$.

relations dans lesquelles nous avons écrit les racines correspondantes. En outre on a le poids $(0 \ 0)$ doublement dégénéré.

Les racines de $su(2)$ sont les sommets d'un hexagone régulier, le centre étant le poids nul doublement dégénéré. On vérifie aisément que les différences des poids des représentations $\mathbf{3}$ et $\bar{\mathbf{3}}$ sont bien des racines. Enfin, la représentation $\mathbf{8}$ est réelle et ses poids sont bien invariants pour $\mu \rightarrow -\mu$.

5.6 Racines simples, diagramme de Dynkin, matrice de Cartan

5.6.1 Poids positifs - Vecteur de plus haut poids

Il est commode d'introduire une relation d'ordre parmi les poids. Etant donné une base de H^* , on dit que le poids μ est positif si sa première composante non nulle est > 0 . On écrit alors $\mu > 0$. On dit qu'il est négatif si sa première composante non nulle est < 0 , ce qu'on écrit $\mu < 0$. Un poids $\mu \neq 0$ est positif ou négatif. Si $\mu > 0$, alors $-\mu < 0$.

On dit que le poids μ est plus grand que le poids ν , $\mu > \nu$, si $\mu - \nu > 0$. On dit aussi que ν est plus petit que μ . Si $\mu \neq \nu$ n'est pas plus grand que ν , alors ν est plus grand que μ (ordre total).

Les figures ci-dessous indiquent les poids positifs et négatifs des représentations $\mathbf{3}$, $\bar{\mathbf{3}}$ et $\mathbf{8}$. On voit en particulier que les racines positives sont

$$\alpha_1 = \left(\frac{1}{2} \quad \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \quad \alpha_2 = \left(\frac{1}{2} \quad -\frac{\sqrt{3}}{2}\right), \quad \alpha_3 = (1 \ 0). \quad (5.48)$$

Comme le nombre de poids distincts dans toute représentation de dimension

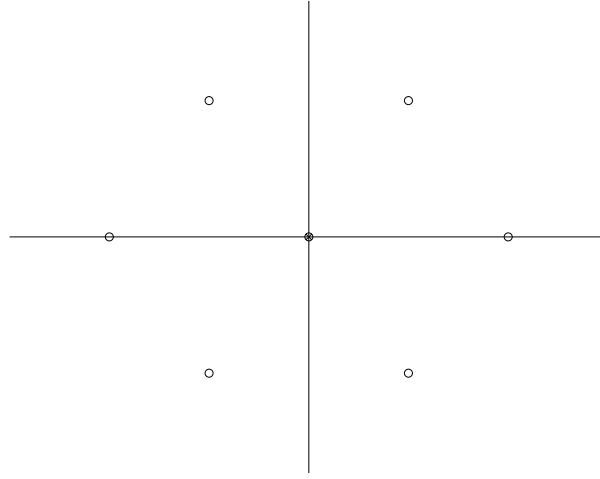


FIGURE 5.3 – Poids de la représentation **8** (le poids nul est doublement dégénéré).

finie est fini, il existe un poids plus grand que tous les autres. On l'appelle le poids le plus haut. En particulier, il existe une racine de plus haut poids qui est α_3 dans le cas de $su(3)$. Le vecteur propre correspondant au poids μ le plus haut est annihilé par tout opérateur e_α quand α est une racine positive (sinon il y aurait un poids $\mu + \alpha$ plus grand que μ). (On verra que le vecteur de poids le plus haut est non dégénéré.)

5.6.2 Racines simples

On appelle racine simple toute racine positive qui ne peut être écrite comme la somme de deux racines positives. Par exemple, dans le cas de $su(3)$, α_1 et α_2 sont simples tandis que $\alpha_3 = \alpha_1 + \alpha_2$ n'est pas simple.

Propriétés des racines simples

1. Si α et β sont des racines simples, alors ni $\alpha - \beta$, ni $\beta - \alpha$ ne sont des racines. En effet, si $\pm(\alpha - \beta)$ sont des racines, alors l'une des deux est positive, soit $\alpha - \beta$. Mais alors $\alpha = (\alpha - \beta) + \beta$ est une somme de racines positives, contrairement à l'hypothèse.
2. L'angle $\theta_{\alpha\beta}$ entre deux racines simples est obtus,

$$\frac{\pi}{2} \leq \theta_{\alpha\beta} < \pi. \quad (5.49)$$

En effet, comme $\alpha - \beta$ n'est pas une racine, on a

$$[e_{-\alpha}, e_\beta] = 0.$$

et donc $q = 0$ dans la formule (5.34),

$$\frac{\alpha \cdot \beta}{\alpha^2} = -\frac{p}{2}. \quad (5.50)$$

La chaîne de racines $\beta + k\alpha$ passant par β commence par β ($k \geq 0$). De la même manière, $[e_{-\beta}, e_\alpha] = 0$ et donc $q' = 0$ dans la formule (5.35),

$$\frac{\alpha \cdot \beta}{\beta^2} = -\frac{p'}{2}. \quad (5.51)$$

Il en résulte

$$\cos \theta_{\alpha, \beta} = -\frac{\sqrt{pp'}}{2}, \quad \frac{\alpha^2}{\beta^2} = \frac{p'}{p} \quad (5.52)$$

ce qui implique en particulier le résultat annoncé.

3. Les racines simples sont linéairement indépendantes. Ceci est une conséquence directe du résultat précédent. Soit

$$\gamma = \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} \alpha = 0$$

une combinaison linéaire des racines simples qui est nulle. Seules les racines avec $\lambda_{\alpha} \neq 0$ apparaissent, donc on peut supposer $\lambda_{\alpha} \neq 0$. Si tous les λ_{α} ont le même signe, par exemple $\lambda_{\alpha} > 0$, alors $\gamma > 0$ et donc $\gamma \neq 0$ contrairement à l'hypothèse. Donc il y a des coefficients positifs et des coefficients négatifs et on peut écrire $\gamma = \mu - \nu$ où μ et ν sont strictement positifs,

$$\mu = \sum_{\lambda_{\alpha} > 0} \lambda_{\alpha} \alpha, \quad \nu = - \sum_{\lambda_{\alpha} < 0} \lambda_{\alpha} \alpha.$$

Mais on obtient alors aussi une contradiction car

$$0 = \gamma^2 = \mu^2 + \nu^2 - 2\mu \cdot \nu \geq \mu^2 + \nu^2 > 0. \quad \square$$

4. Toute racine positive peut s'écrire comme combinaison linéaire à coefficients entiers non négatifs des racines simples. En effet, soit ϕ une racine positive. Si ϕ est simple, l'assertion est démontrée. Si ϕ n'est pas simple, on a $\phi = \phi_1 + \phi_2$ avec ϕ_1 et ϕ_2 racines positives strictement plus petites que ϕ . Si ϕ_1 et ϕ_2 sont simples, c'est terminé. Sinon, on continue. Le processus s'arrête car on a un nombre fini de racines positives. On conclut en particulier que toutes les racines appartiennent au réseau $\mathbb{Z}\alpha_i$ engendré par les racines simples.
5. Les racines simples forment une base de H^* . En effet, on sait déjà qu'elles sont linéairement indépendantes. Il suffit par conséquent de montrer qu'elles forment un système complet. Si cela n'était pas vrai, il y aurait un élément ξ de H^* orthogonal à toutes les racines simples et donc aussi à toutes les racines par le point précédent. Par conséquent, on aurait $[\xi \cdot h, e_\phi] = \phi(\xi \cdot h)e_\phi = (\phi \cdot \xi)e_\phi = 0$. Mais on aurait aussi $[\xi \cdot h, h_i] = 0$, donc $\xi \cdot h$ commuterait avec toute l'algèbre, qui ne serait pas simple. \square

On en déduit que le nombre de racines simples est égal au rang r de l'algèbre.

5.6.3 Détermination de toutes les racines à partir des racines simples

Connaissant les racines simples α_i , on peut très facilement déterminer toutes les racines. Soit α une racine positive (les racines négatives s'obtiennent par changement de signe). On appelle hauteur de α la somme

$$k = \sum_i k_i \quad (5.53)$$

où les entiers non négatifs k_i sont les coefficients du développement de α en terme des racines simples,

$$\alpha = \sum_i k_i \alpha_i. \quad (5.54)$$

Les racines simples α_i sont de hauteur 1.

Si α est une racine de hauteur $\ell + 1$ ($\ell \geq 1$), alors il existe une racine β de hauteur ℓ et une racine simple α_k telles que

$$\alpha = \beta + \alpha_k. \quad (5.55)$$

Si ce n'était pas le cas, on aurait $[e_{-\alpha_i}, e_\alpha] = 0$ pour toutes les racines simples (sinon $e_\alpha \sim [e_{\alpha_k}, [e_{-\alpha_k}, e_\alpha]]$ pour α_k telle que $[e_{-\alpha_k}, e_\alpha] \neq 0$ et $\alpha - \alpha_k$ est une racine de hauteur ℓ telle que $\alpha = (\alpha - \alpha_k) + \alpha_k$). Ceci impliquerait que e_α est état de spin minimum pour tous les $su(2)$ associés aux racines simples, c-à-d. $\alpha \cdot \alpha_k \leq 0$ ($q = 0$), d'où on tirerait la contradiction

$$\alpha \cdot \alpha = \alpha \cdot \left(\sum_i k_i \alpha_i \right) \leq 0.$$

Si on connaît toutes les racines de hauteur ℓ , on peut déterminer les racines de hauteur $\ell + 1$ en considérant les chaînes de racines simples passant par les racines de hauteur ℓ : soit ϕ une racine de hauteur ℓ . On a

$$\frac{2\alpha_i \cdot \phi}{\alpha_i^2} = -(p_{\alpha_i} - q_{\alpha_i}).$$

Comme q_{α_i} est connu (on connaît toutes les racines de hauteur $\leq \ell$), on obtient p_{α_i} . Si $p_{\alpha_i} > 0$, $\phi + \alpha_i$ est une racine.

Exemple

Les vecteurs α_1 et α_2 tels que

$$\alpha_1 \cdot \alpha_1 = 1, \quad \alpha_1 \cdot \alpha_2 = -1, \quad \alpha_2 \cdot \alpha_2 = 2$$

sont les racines simples d'une algèbre de Lie de rang 2 (voir plus bas). On a

$$\frac{2\alpha_1 \cdot \alpha_2}{\alpha_1^2} = -2, \quad \frac{2\alpha_1 \cdot \alpha_2}{\alpha_2^2} = -1$$

et par conséquent $\alpha_1 + \alpha_2$ est une racine, ainsi que $2\alpha_1 + \alpha_2$. Il n'y a pas de racine de hauteur 4 car ni $3\alpha_1 + \alpha_2$ ni $2\alpha_1 + 2\alpha_2$ ne sont des racines. Pour $3\alpha_1 + \alpha_2$, c'est évident parce que la chaîne de racines $\alpha_2, \alpha_2 + \alpha_1, \alpha_2 + 2\alpha_1$ s'arrête à $\alpha_2 + 2\alpha_1$ car elle a $q = 0$ ($\alpha_2 - \alpha_1$ n'est pas une racine) et $p - q = 2 \Rightarrow p = 2$. Pour $2\alpha_1 + 2\alpha_2$, c'est également évident car $\alpha_1 + \alpha_2$ est une racine et donc $2(\alpha_1 + \alpha_2)$ n'en est pas une. Il est instructif de vérifier que $2(\alpha_1 + \alpha_2)$ n'est pas une racine en considérant la chaîne de racines $2\alpha_1 + \alpha_2 + k\alpha_2$ passant par $2\alpha_1 + \alpha_2$. On a $q = 0$ car $2\alpha_1$ n'est pas une racine. D'autre part,

$$(2\alpha_1 + \alpha_2) \cdot \alpha_2 = 0,$$

ce qui implique $p - q = 0$ et donc aussi $p = 0$, ce que l'on veut démontrer.

En résumé, il y a 4 racines positives, 4 racines négatives et 2 poids nuls. L'algèbre est à 10 dimensions. On verra plus bas que c'est $so(5)$.

5.6.4 Groupe de Weyl

Soit α une racine positive quelconque et β une racine. On sait que le nombre

$$2 \frac{\alpha \cdot \beta}{\alpha^2}$$

est un entier. L'image de β par la réflexion dans l'hyperplan perpendiculaire à α ,

$$\beta \rightarrow \beta' = \beta - 2 \frac{\alpha \cdot \beta}{\alpha^2} \alpha \tag{5.56}$$

appartient donc au réseau engendré par les racines simples³. En fait, c'est une racine. En effet, la chaîne de racines α passant par β a la forme

$$\beta - q\alpha, \beta - (q-1)\alpha, \dots, \beta - \alpha, \beta, \beta + \alpha, \dots, \beta + (p-1)\alpha, \beta + p\alpha \tag{5.57}$$

avec

$$p - q = -2 \frac{\alpha \cdot \beta}{\alpha^2}.$$

Par conséquent l'entier $-2 \frac{\alpha \cdot \beta}{\alpha^2}$ est compris entre $-q$ et p ,

$$-q \leq -2 \frac{\alpha \cdot \beta}{\alpha^2} \leq p.$$

Il en résulte que

$$\beta - 2 \frac{\alpha \cdot \beta}{\alpha^2} \alpha$$

appartient à la chaîne (5.57) et est donc une racine. Les réflexions (5.56) laissent donc le système de racines invariant.

On appelle groupe de Weyl le groupe engendré par les "réflexions de Weyl" (5.56). C'est un groupe cristallographique fini. On vérifie facilement que dans

3. A noter que α et $-\alpha$ donnent la même réflexion, c'est pourquoi on peut supposer la racine α positive.

le cas de $su(3)$, le groupe de Weyl est le groupe S_3 (\equiv groupe diédral D_3) de symétrie du triangle équilatéral.

Le groupe de Weyl est fini car il existe un homomorphisme du groupe de Weyl dans le groupe fini S_Δ des permutations des racines. Cet homomorphisme est injectif car si un élément du groupe de Weyl fixe toutes les racines, il fixe l'espace linéaire engendré par les racines, qui est tout H^* . C'est donc l'identité. Le groupe de Weyl est ainsi isomorphe à un sous-groupe de S_Δ .

5.6.5 Diagrammes de Dynkin - Matrice de Cartan

Les racines simples déterminent toutes les racines et, comme on le verra, toute l'algèbre à partir des "entiers de Cartan" $2\frac{\alpha_i \cdot \alpha_j}{\alpha_i^2}$. On définit la matrice de Cartan A comme la matrice dont les éléments de matrice sont précisément les entiers de Cartan,

$$A = (A_{ij}), \quad A_{ij} = 2\frac{\alpha_i \cdot \alpha_j}{\alpha_i^2} \quad (5.58)$$

Cette matrice a uniquement des 2 sur la diagonales et des entiers ≤ 0 hors diagonale. Elle n'est pas toujours symétrique mais jouit de la propriété que si $A_{ij} \neq 0$, alors $A_{ji} \neq 0$.

La matrice de Cartan encode toute l'algèbre. On peut la représenter graphiquement par un diagramme de Dynkin. A chaque racine, on associe un vertex du diagramme de Dynkin correspondant. On trace un nombre d'arêtes entre le vertex i et le vertex j égal à $\max\{|A_{ij}|, |A_{ji}|\}$ et on met une flèche qui pointe vers i (respectivement j) si $|A_{ij}| > |A_{ji}|$ (respectivement $|A_{ji}| > |A_{ij}|$) - la flèche pointe donc vers la racine la plus courte lorsque α_i et α_j ont des longueurs différentes. Les seules possibilités sont

- pas d'arête, angle de $\pi/2$ entre les racines ;
- une arête, angle de $2\pi/3$ entre les racines ;
- deux arêtes, angle de $3\pi/4$ entre les racines ;
- trois arêtes, angle de $5\pi/6$ entre les racines.

5.7 Construction de l'algèbre à partir des racines simples

On peut reconstruire complètement l'algèbre à partir des racines simples α_i comme nous allons le montrer dans cette section. Celles-ci, les vecteurs e_i , $f_i \equiv e_i^\dagger$ correspondants et les éléments de l'algèbre de Cartan obéissent aux relations

$$[h, h'] = 0, \quad [h, e_i] = \alpha_i(h)e_i, \quad [h, f_i] = -\alpha_i(h)f_i, \quad [e_i, f_j] = \delta_{ij} \alpha_i \cdot h \quad (5.59)$$

En termes de la base orthonormée $\{h_i\}$ et des composantes α_{ij} des racines simples dans la base duale des $\{h_i\}$, on a

$$[h_i, h_j] = 0, \quad [h_j, e_i] = \alpha_{ij}e_i, \quad [h_j, f_i] = -\alpha_{ij}f_i, \quad [e_i, f_j] = \delta_{ij} \sum_k \alpha_{ik} h_k$$

Ces relations s'appellent les relations de Chevalley. Elles sont invariantes sous la transformation⁴ :

$$\tau(h) = -h, \quad \tau(e_i) = -f_i, \quad \tau(f_i) = -e_i \quad (5.60)$$

(les nombres α_{ij} sont invariants), de carré I . Il y a d'autres relations entre les générateurs h_i, e_i, f_i qui viennent des conditions sur les chaînes de racines (voir plus bas et exercices).

Les vecteurs e_α associés aux racines positives s'obtiennent à partir des chaînes de racines passant par les racines simples et prennent donc la forme de multicommutateurs impliquant les e_i seulement. De même, les vecteurs $e_{-\alpha}$ associés aux racines négatives prennent la forme de multicommutateurs impliquant les f_i seulement. En fait, tout vecteur de l'algèbre de Lie peut s'écrire comme combinaison linéaire des h_i , des multicommutateurs impliquant les e_i et des multicommutateurs impliquant les f_i . L'algèbre de Lie L se décompose donc comme somme directe d'espaces vectoriels

$$L = N^- \oplus H \oplus N^+ \quad (5.61)$$

où les N^-, H et N^+ sont des sous-algèbres (mais attention, c'est une somme directe de sous-vectoriels, pas une somme directe de sous-algèbres car ces sous-algèbres ne commutent pas). On a $[H, N^+] \subset N^+, [H, N^-] \subset N^-$. La décomposition (5.61) s'appelle la décomposition triangulaire de L . On notera également qu'en utilisant l'identité de Jacobi si nécessaire, on peut ramener tout multicommutateur contenant les e_i (respectivement, les f_i) en une combinaison linéaire de multicommutateurs "emboîtés" de la forme

$$[e_{i_1}, [e_{i_2}, [e_{i_3}, [\dots, [e_{i_{k-1}}, e_{i_k}] \dots]]]] = ad_{e_{i_1}} ad_{e_{i_2}} \dots ad_{e_{i_{k-1}}} e_{i_k}.$$

Par exemple,

$$\begin{aligned} [[e_1, e_2], [e_3, e_4]] &= [[[e_1, e_2], e_3], e_4] + [e_3, [[e_1, e_2], e_4]] \\ &= ad_{e_4} ad_{e_3} ad_{e_1} e_2 - ad_{e_3} ad_{e_4} ad_{e_1} e_2. \end{aligned}$$

On étend l'involution de Chevalley τ à toute l'algèbre comme automorphisme, $\tau([x, y]) = [\tau(x), \tau(y)]$. L'existence de l'involution de Chevalley permet de déterminer toute l'algèbre quand on connaît N^+ . Dans la suite, nous ne nous intéresserons donc qu'aux racines positives.

A chaque racine positive α est associé un vecteur e_α déterminé à une phase près (car les racines sont non dégénérées). Ce vecteur se transforme selon une représentation de spin j (qui dépend de i) pour le $su(2)$ engendré par e_i . Rappelons qu'avec le choix de phase standard, les opérateurs J^3, J^+ et J^- agissent de la manière suivante :

$$J^3 |j, m\rangle = m |j, m\rangle \quad (5.62)$$

$$J^+ |j, m\rangle = \sqrt{(j+m+1)(j-m)/2} |j, m+1\rangle \quad (5.63)$$

$$J^- |j, m\rangle = \sqrt{(j+m)(j-m+1)/2} |j, m-1\rangle \quad (5.64)$$

4. On peut récrire cette transformation sous la forme $\tau(x) = -x^\dagger$.

En partant des vecteurs e_i associés aux racines simples et en prenant leurs commutateurs en suivant les chaînes de racines, on obtient toute l'algèbre. Montrons comment cela fonctionne pour l'algèbre $B_2 \equiv C_2 \equiv so(5)$ étudiée ci-dessus. Les racines simples sont α_1 et α_2 avec

$$\alpha_1 \cdot \alpha_1 = 1, \quad \alpha_1 \cdot \alpha_2 = -1, \quad \alpha_2 \cdot \alpha_2 = 2. \quad (5.65)$$

Dans une base orthonormée, on peut prendre $\alpha_1 = (1, 0)$ et $\alpha_2 = (-1, 1)$.

Les sous-algèbres $su(2)$ respectivement associées à α_1 et α_2 sont :

$$e^+ = e_1, \quad e^- = e_1^\dagger, \quad e^3 = h_1 \quad (5.66)$$

$$E^+ = \frac{e_2}{\sqrt{2}}, \quad E^- = \frac{e_2^\dagger}{\sqrt{2}}, \quad E^3 = \frac{-h_1 + h_2}{2} \quad (5.67)$$

A la hauteur 1, on a les racines α_1 et α_2 avec pour vecteurs propres e_1 et e_2 . A la hauteur 2, on a la racine $\alpha_1 + \alpha_2$ dont le vecteur propre $e_{\alpha_1 + \alpha_2}$ est proportionnel à $[e_1, e_2]$. Fixons la phase en suivant les conventions standards pour le $su(2)$ associé à α_1 .

La chaîne de racines $\alpha_2, \alpha_2 + \alpha_1, \alpha_2 + 2\alpha_1$ décrit une représentation de $su(2)$ de spin 1, dont e_2 est le vecteur dont le “moment cinétique selon z ” (valeur propre de e^3) est minimum (e_2 est annihilé par e^- , $ad_{e^-} e_2 = [e^-, e_2] = 0$), $e_2 \equiv |1, -1\rangle$. Le vecteur $|1, 0\rangle$ dont le “moment cinétique selon z ” est nul s'obtient en agissant une fois avec e^+ , avec un facteur égal à 1 d'après les formules ci-dessus :

$$e_{\alpha_1 + \alpha_2} = ad_{e^+}(e_2) = [e_1, e_2]. \quad (5.68)$$

On augmente encore le spin de une unité en agissant avec e^+ (et un facteur toujours égal à 1 d'après les formules ci-dessus :

$$e_{2\alpha_1 + \alpha_2} = ad_{e^+}([e_1, e_2]) = [e_1, [e_1, e_2]] \quad (5.69)$$

(vecteur de spin maximum $|1, 1\rangle$).

Il est intéressant de considérer le vecteur $e_{\alpha_1 + \alpha_2}$ du point de vue du $su(2)$ associé à α_2 . Les vecteurs e_1 et $e_{\alpha_1 + \alpha_2}$ se transforment selon la représentation de spin $1/2$. On a $e_1 \equiv |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle$ puisque $ad_{E^-}(e_1) = 0$. On obtient le vecteur $|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle$ de spin maximum en agissant avec $\sqrt{2}E^+$ (voir formules ci-dessus), ce qui donne $[e_2, e_1] = -[e_1, e_2]$. En ayant choisit $[e_1, e_2]$ comme vecteur propre de spin maximum (associé à la racine $\alpha_1 + \alpha_2$), on a donc introduit un signe -1 par rapport aux conventions standards.

Ayant déterminé les vecteurs propres associés aux racines, on peut tous les commutateurs en utilisant l'identité de Jacobi (voir exercices).

5.8 Poids fondamentaux

On a vu que toute représentation d'une algèbre compacte possède un plus haut poids μ qui a la propriété d'être plus haut que tous les autres poids de

la représentation et qui est donc unique (la relation $<$ est une relation d'ordre total). Nous démontrons dans cette section un certain nombre de propriétés du poids fondamental d'une représentation *irréductible*. Dans toute cette section, les représentations sont irréductibles même si cela n'est pas explicitement répété.

5.8.1 Poids le plus haut et racines positives

Considérons une représentation irréductible s de l'algèbre de Lie L . Soit V l'espace de la représentation. Les opérateurs $s(e_\alpha) \equiv e_\alpha$, $s(h) \equiv h$ (abus de notation!) sont des opérateurs linéaires agissant dans V . Soit $f_{\mu,A}$ un vecteur du sous-espace propre V_μ associé au plus haut poids μ . On a

$$e_\alpha f_{\mu,A} = 0 \tag{5.70}$$

pour toute racine positive car $\mu + \alpha > \mu$ n'est pas un poids. Ceci implique

$$e_i f_{\mu,A} = 0 \tag{5.71}$$

pour toute racine simple α_i ($e_{\alpha_i} \equiv e_i$) et inversement, si (5.71) est vrai, (5.70) en découle car les vecteurs e_α associés aux racines positives s'expriment comme commutateurs des e_i .

5.8.2 Non-dégérescence du plus haut poids

Les polynômes en les opérateurs e_α , h , sont également des opérateurs linéaires agissant dans V . Notons U l'algèbre de ces polynômes. Soit v un vecteur non nul quelconque de la représentation. Le sous espace vectoriel Uv engendré par toutes les images de v sous les éléments de U est clairement invariant, $x(Uv) \subset Uv \forall x \in L$, et donc

$$Uv = V.$$

En utilisant les relations de commutation, on peut voir que les monômes

$$f_{i_1}^{q_1} \dots f_{i_k}^{q_k} h_1^{m_1} \dots h_r^{m_r} e_{j_1}^{p_1} \dots e_{j_m}^{p_m}$$

forment une base de U (le vérifier par récurrence).

Considérons l'action de U sur un vecteur $f_{\mu,A} \in V_\mu$. Les e_i annihilent $f_{\mu,A}$; par conséquent seuls les monômes avec $p_1 = p_2 = \dots = p_m = 0$,

$$f_{i_1}^{q_1} \dots f_{i_k}^{q_k} h_1^{m_1} \dots h_r^{m_r}$$

peuvent donner un vecteur non nul quand ils agissent sur $f_{\mu,A}$. D'autre part, les h_i reproduisent $f_{\mu,A}$ au coefficient multiplicatif μ_i près, et les f_i font strictement descendre le poids μ . Les seuls vecteurs dans $Uf_{\mu,A}$ qui sont de plus haut poids μ sont donc tous multiples de $f_{\mu,A}$. Comme $Uf_{\mu,A} = V$, il en résulte que le plus haut poids est non dégénéré (V_μ est à une dimension). L'indice supplémentaire A est donc superflu pour le plus haut poids.

Il en résulte que tous les vecteurs de la représentation s s'obtiennent à partir du vecteur f_μ en agissant avec les opérateurs de "descente" f_i et ont donc la forme

$$f_{i_1}^{q_1} \cdots f_{i_k}^{q_k}(f_\mu).$$

On en tire que les poids de la représentation s'obtiennent à partir du plus haut poids comme

$$\mu - \sum_{i=1}^r n_i \alpha_i \quad (5.72)$$

où les n_i sont des entiers non négatifs.

On notera aussi que f_μ et ses multiples sont les seuls vecteurs annihilés par tous les opérateurs e_α avec $\alpha > 0$. En effet, s'il y avait un vecteur non nul f_ν avec $\nu < \mu$ tel que $e_i f_\nu = 0$, alors le sous-espace invariant $U f_\nu$ serait un sous-espace propre non nul de V , contrairement à l'hypothèse d'irréductibilité.

5.8.3 Chambre fondamentale de Weyl, poids dominant

On appelle chambre fondamentale de Weyl \mathcal{W} le domaine convexe de H^* défini par les inégalités

$$\lambda \in \mathcal{W} \subset H^* \Leftrightarrow (\lambda | \alpha_i) \equiv \lambda \cdot \alpha_i \geq 0 \quad \forall \alpha_i \quad (5.73)$$

(où les α_i sont les racines simples). On dit qu'un poids est *dominant* s'il est dans la chambre fondamentale de Weyl.

Theorème 5.8.1. *Les poids les plus hauts sont dominants.*

En effet, si μ est le poids le plus haut d'une représentation, alors toutes les chaînes de racines α_i passant par μ ne vont pas plus haut que μ , donc ont un p nul. Ceci implique $\mu \cdot \alpha_i \geq 0$. \square

5.8.4 Poids fondamentaux

Pour le poids le plus haut μ d'une représentation quelconque, on a

$$2 \frac{\mu \cdot \alpha_i}{\alpha_i^2} = \ell^i \quad (5.74)$$

où les ℓ^i sont des entiers non négatifs, caractérisant la longueur de la chaîne de racines α_i passant par μ ($\ell^i \equiv q^i$, $p^i = 0$). On appelle les nombres ℓ^i les "coefficients de Dynkin" de la représentation, que l'on note $(\ell^1, \ell^2, \dots, \ell^r)$.

Introduisons les vecteurs $\mu^j \in H^*$ ($j = 1, \dots, r$) tels que

$$2 \frac{\mu^j \cdot \alpha_i}{\alpha_i^2} = \delta^{ij}. \quad (5.75)$$

On a

$$\mu = \sum_{j=1}^r \ell^j \mu^j. \quad (5.76)$$

On peut montrer (nous ne le ferons pas ici en général mais le vérifierons dans un certain nombre de cas) que les vecteurs μ^j sont chacun le poids le plus haut d'une représentation irréductible de l'algèbre de Lie. On les appelle pour cette raison "poids fondamentaux" et les représentations correspondantes "représentations fondamentales". Pour $su(2)$, la représentation fondamentale (1) est la représentation $D_{\frac{1}{2}}$. Pour $su(3)$, on a $(1, 0) = \mathbf{3}$, $(0, 1) = \bar{\mathbf{3}}$ et $(1, 1) = \mathbf{8}$. En effet, le poids le plus haut de la représentation $\mathbf{3}$ est $\mu^1 = \left(\frac{1}{2} \quad \frac{\sqrt{3}}{6}\right)$, tandis que le poids le plus haut de la représentation $\bar{\mathbf{3}}$ est $\mu^2 = \left(\frac{1}{2} \quad -\frac{\sqrt{3}}{6}\right)$, et ceux-ci obéissent bien aux relations d'orthogonalité écrites ci-dessus avec les racines simples $\alpha^1 = \left(\frac{1}{2} \quad \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ et $\alpha^2 = \left(\frac{1}{2} \quad -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ (de norme 1).

Rappelons que dans le produit tensoriel de deux représentations s_1 et s_2 de la même algèbre de Lie L , l'opérateur $x \in L$ est représenté par $(s_1(x) \otimes I_2) \oplus (I_1 \otimes s_2(x))$. Il en résulte que si on connaît les représentations fondamentales, on peut construire la représentation irréductible de plus haut poids μ où $\mu = \sum_{j=1}^r \ell^j \mu^j$ (ℓ^j entiers non négatifs) est un poids (entier) dominant quelconque, en prenant le produit tensoriel de ℓ^1 fois la représentation fondamentale $(1, 0, 0, \dots, 0)$, de ℓ^2 fois la représentation fondamentale $(0, 2, 0, \dots, 0)$ etc et en extrayant la représentation irréductible qui contient l'unique vecteur de poids μ (donné par le produit tensoriel des vecteurs de plus haut poids de chacune des représentations apparaissant dans le produit tensoriel). C'est ce que nous avons fait l'an passé pour $su(2)$.

On appelle réseau des poids le réseau $\mathbb{Z}\mu^i$. Le réseau des racines $\mathbb{Z}\alpha_i$ est un sous-réseau (en général propre, sauf dans le cas self-dual) du réseau des poids.

5.8.5 Groupe de Weyl et poids

Soit s une représentation de l'algèbre de Lie simple compacte L . Ses poids peuvent être dégénérés, sauf le plus haut poids, noté μ .

Theorème 5.8.2. *L'image d'un poids de s par le groupe de Weyl est un poids de s . En outre, deux poids dans la même orbite du groupe de Weyl ont même dégénérescence.*

En effet, soit ν un poids de s et α une racine positive quelconque. Considérons la chaîne de poids

$$\nu - q\alpha, \nu - (q-1)\alpha, \dots, \nu, \dots, \nu + (p-1)\alpha, \nu + p\alpha.$$

Ces poids sont les poids d'une représentation (pas nécessairement irréductible) du $su(2)$ associé à α . On sait que les représentations de $su(2)$ sont symétriques par rapport à l'origine (ici $\nu + \frac{1}{2}(p-q)\alpha$) : les "spins selon z " $+k$ et $-k$ (ici $\nu + \frac{1}{2}(p-q)\alpha + k\alpha$ et $\nu + \frac{1}{2}(p-q)\alpha - k\alpha$) apparaissent avec la même multiplicité. Donc ν et $\nu + (p-q)\alpha$ apparaissent avec la même multiplicité. Mais $\nu + (p-q)\alpha$ est l'image de ν par la réflexion de Weyl s_α ,

$$\nu \rightarrow s_\alpha(\nu) = \nu - 2 \frac{\nu \cdot \alpha}{\alpha^2} \alpha = \nu + (p-q)\alpha.$$

□.

La chambre fondamentale de Weyl possède les propriétés importantes suivantes.

Theorème 5.8.3. *Soit $\lambda \in H^*$ un point quelconque de H^* et O son orbite sous le groupe de Weyl. Alors O possède un point dans la chambre fondamentale de Weyl \mathcal{W} .*

En effet, l'orbite O étant finie possède un élément ω plus grand que tous les autres. Si ω n'est pas dans \mathcal{W} , alors $\omega \cdot \alpha_i < 0$ pour au moins une racine simple α_i . Mais alors, $s_i(\omega) = \omega - 2\frac{\omega \cdot \alpha_i}{\alpha_i^2} \alpha_i > \omega$ contrairement à l'hypothèse. Donc ω est dans \mathcal{W} , ce qui montre que l'orbite O intersecte \mathcal{W} . □.

En fait, O possède un et un seul point dans la chambre fondamentale de Weyl \mathcal{W} (qui est donc un "domaine fondamental" pour l'action du groupe de Weyl dans H^*). Nous ne démontrerons pas cette propriété en général mais seulement quand O est l'orbite d'un poids. On a alors

Theorème 5.8.4. *Soit s une représentation irréductible de l'algèbre de Lie simple compacte L de plus haut poids μ . Soit ν un poids quelconque de la représentation. Alors $|\nu| \leq |\mu|$ avec égalité ssi ν est dans l'orbite de Weyl de μ .*

D'après le théorème précédent, on peut supposer que ν est dans la chambre fondamentale de Weyl et donc $\nu \cdot \alpha_i \geq 0$. D'autre part, $\nu = \mu - \sum_i n_i \alpha_i$ où les entiers n_i sont non négatifs, puisque ν est un poids de la représentation de plus haut poids μ . Calculons la norme de μ en fonction de celle de ν :

$$|\mu|^2 = |\nu|^2 + 2 \sum_i n_i (\nu \cdot \alpha_i) + \left| \sum_i n_i \alpha_i \right|^2 \geq |\nu|^2 + \left| \sum_i n_i \alpha_i \right|^2$$

par le fait que ν est dominant. Le membre de droite est $\geq |\nu|^2$, avec égalité ssi $\sum_i n_i \alpha_i = 0$ c-à-d. $\mu = \nu$. □.

Chapitre 6

Représentations de $su(3)$

6.1 Les représentations (m, n)

On a vu que les représentations irréductibles fondamentales $(1, 0)$ et $(0, 1)$ sont respectivement les représentations $\mathbf{3}$ et $\bar{\mathbf{3}}$ et que $(1, 0)^* = (0, 1)$. On peut trouver la représentation irréductible (m, n) de plus haut poids $m\mu^1 + n\mu^2$ en décomposant le produit tensoriel de m fois la $\mathbf{3}$ par n fois la $\bar{\mathbf{3}}$, ou en partant du vecteur de plus haut poids associé au poids $m\mu^1 + n\mu^2$ et en considérant successivement les chaînes de racines appropriées. Nous considérerons les méthodes tensorielles dans la section suivante, nous illustrons ici la seconde méthode.

6.1.1 Représentation $(m, n)^*$

On notera que le poids le plus bas de la représentation (m, n) est $-m\mu^2 - n\mu^1$ car le poids le plus bas de la représentation $\mathbf{3}$ (respectivement $\bar{\mathbf{3}}$) est $-\mu^2$ (respectivement $-\mu^1$). Comme les poids de la représentation complexe conjuguée $(m, n)^*$ sont moins les poids de la représentation (m, n) , on en déduit que

$$(m, n)^* = (n, m). \tag{6.1}$$

Il en résulte que seules les représentations (m, m) sont réelles.

Avant de continuer, rassemblons toutes les formules clés :

$$[h_1, e_1] = \frac{1}{2}e_1, \quad [h_2, e_1] = \frac{\sqrt{3}}{2}e_1 \quad (6.2)$$

$$[h_1, e_2] = \frac{1}{2}e_2, \quad [h_2, e_2] = -\frac{\sqrt{3}}{2}e_2 \quad (6.3)$$

$$[e_1, e_1^\dagger] = \frac{1}{2}h_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}h_2, \quad [e_1, e_2^\dagger] = 0 \quad (6.4)$$

$$[e_2, e_2^\dagger] = \frac{1}{2}h_1 - \frac{\sqrt{3}}{2}h_2, \quad [e_2, e_1^\dagger] = 0 \quad (6.5)$$

$$\alpha_1 = \left(\frac{1}{2} \quad \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \quad \alpha_2 = \left(\frac{1}{2} \quad -\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \quad (6.6)$$

$$\alpha_1 \cdot \alpha_1 = 1 = \alpha_2 \cdot \alpha_2, \quad \alpha_1 \cdot \alpha_2 = -\frac{1}{2} \quad (6.7)$$

$$\mu^1 = \left(\frac{1}{2} \quad \frac{\sqrt{3}}{6}\right), \quad \mu^2 = \left(\frac{1}{2} \quad -\frac{\sqrt{3}}{6}\right) \quad (6.8)$$

6.1.2 La représentation 6

Pour illustrer l'utilisation des chaînes de racines dans la construction des représentations (m, n) , considérons la représentation $(2, 0)$ de plus haut poids $2\mu^1 = \left(1 \quad \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

On part du vecteur de plus haut poids $f_{2\mu^1} \equiv |2\mu^1\rangle$ qui est annihilé par e^1 et e^2 (et donc aussi $[e^1, e^2]$),

$$e^1|2\mu^1\rangle = 0, \quad e^2|2\mu^1\rangle = 0.$$

On normalise $\langle 2\mu^1|2\mu^1\rangle$ à 1,

$$\langle 2\mu^1|2\mu^1\rangle = 1.$$

En outre,

$$h_1|2\mu^1\rangle = |2\mu^1\rangle, \quad h_2|2\mu^1\rangle = \frac{\sqrt{3}}{3}|2\mu^1\rangle.$$

La chaîne de racines α_1 passant par $|2\mu^1\rangle$ a $p = 0$ et $q = 2(2\mu^1 \cdot \alpha_1) = 2$, tandis que la chaîne de racines α_2 passant par $|2\mu^1\rangle$ a $p = 0$ et $q = 0$. Donc e_2^\dagger annihile aussi $|2\mu^1\rangle$, mais $e_1^\dagger|2\mu^1\rangle \neq 0$, $(e_1^\dagger)^2|2\mu^1\rangle \neq 0$ et $(e_1^\dagger)^3|2\mu^1\rangle = 0$,

$$e_2^\dagger|2\mu^1\rangle = 0, \quad e_1^\dagger|2\mu^1\rangle = |2\mu^1 - \alpha_1\rangle, \quad (e_1^\dagger)^2|2\mu^1\rangle = |2\mu^1 - 2\alpha_1\rangle, \quad (e_1^\dagger)^3|2\mu^1\rangle = 0.$$

Ces états sont normalisés correctement car

$$\langle 2\mu^1|e_1 e_1^\dagger|2\mu^1\rangle = \langle 2\mu^1|[e_1, e_1^\dagger]|2\mu^1\rangle = \langle 2\mu^1|\frac{1}{2}h_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}h_2|2\mu^1\rangle = \langle 2\mu^1|2\mu^1\rangle = 1$$

et

$$e_1|2\mu^1 - \alpha_1\rangle = e_1 e_1^\dagger|2\mu^1\rangle = [e_1, e_1^\dagger]|2\mu^1\rangle = |2\mu^1\rangle$$

de sorte que

$$\begin{aligned} \langle 2\mu^1 - \alpha_1 | e_1 e_1^\dagger | 2\mu^1 - \alpha_1 \rangle &= \langle 2\mu^1 - \alpha_1 | [e_1, e_1^\dagger] | 2\mu^1 - \alpha_1 \rangle + 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

car $\left(\frac{1}{2}h_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}h_2\right) | 2\mu^1 - \alpha_1 \rangle = 0$ (l'état $| 2\mu^1 - \alpha_1 \rangle$ possède spin zéro selon z pour le $su(2)$ associé à α_1). De la même manière, on a aussi

$$e_1 | 2\mu^1 - 2\alpha_1 \rangle = e_1 e_1^\dagger | 2\mu^1 - \alpha_1 \rangle = [e_1, e_1^\dagger] | 2\mu^1 - \alpha_1 \rangle + e_1^\dagger e_1 | 2\mu^1 - \alpha_1 \rangle = | 2\mu^1 - \alpha_1 \rangle$$

et

$$\left(\frac{1}{2}h_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}h_2\right) | 2\mu^1 - 2\alpha_1 \rangle = -| 2\mu^1 - 2\alpha_1 \rangle.$$

Examinons à présent la chaîne de racines α_2 passant par $| 2\mu^1 - \alpha_1 \rangle$. On a $p = 0$ car il n'y a pas de poids $2\mu^1 - \alpha_1 + \alpha_2$ correspondant à l'état inexistant $e_2 e_1^\dagger | 2\mu^1 \rangle = e_1^\dagger e_2 | 2\mu^1 \rangle = 0$. De

$$2 \frac{(2\mu^1 - \alpha_1) \cdot \alpha_2}{\alpha_2^2} = 1$$

on tire que $q = 1$ de telle sorte que l'état $e_2^\dagger | 2\mu^1 - \alpha_1 \rangle$ existe et forme avec l'état $| 2\mu^1 - \alpha_1 \rangle$ une représentation de spin $1/2$ du $su(2)$ associé à α_2 . La bonne normalisation est

$$| 2\mu^1 - \alpha_1 - \alpha_2 \rangle = \sqrt{2} e_2^\dagger | 2\mu^1 - \alpha_1 \rangle.$$

On a aussi

$$e_2 | 2\mu^1 - \alpha_1 - \alpha_2 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} | 2\mu^1 - \alpha_1 \rangle.$$

Passons à la chaîne de racines α_2 passant par $| 2\mu^1 - 2\alpha_1 \rangle$. On a à nouveau $p = 0$ car il n'y a pas de poids $2\mu^1 - 2\alpha_1 + \alpha_2$ correspondant à l'état inexistant $e_2 e_1^\dagger e_1^\dagger | 2\mu^1 \rangle = (e_1^\dagger)^2 e_2 | 2\mu^1 \rangle = 0$. De

$$2 \frac{(2\mu^1 - 2\alpha_1) \cdot \alpha_2}{\alpha_2^2} = 2$$

on tire que $q = 2$ de telle sorte que les états $e_2^\dagger | 2\mu^1 - 2\alpha_1 \rangle$ et $(e_2^\dagger)^2 | 2\mu^1 - 2\alpha_1 \rangle$ existent et forment avec l'état $| 2\mu^1 - 2\alpha_1 \rangle$ une représentation de spin 1 du $su(2)$ associé à α_2 . On a

$$| 2\mu^1 - 2\alpha_1 - \alpha_2 \rangle = e_2^\dagger | 2\mu^1 - 2\alpha_1 \rangle, \quad | 2\mu^1 - 2\alpha_1 - 2\alpha_2 \rangle = e_2^\dagger | 2\mu^1 - 2\alpha_1 - \alpha_2 \rangle.$$

Il convient à présent d'examiner si de nouveaux états ne peuvent être créés en considérant les chaînes de racines α_1 passant par les nouveaux états $| 2\mu^1 - \alpha_1 - \alpha_2 \rangle$, $| 2\mu^1 - 2\alpha_1 - \alpha_2 \rangle$ et $| 2\mu^1 - 2\alpha_1 - 2\alpha_2 \rangle$. On vérifie aisément que ce n'est pas le cas. Considérons en effet la chaîne de racines α_1 passant par $| 2\mu^1 - \alpha_1 - \alpha_2 \rangle \sim$

$e_2^\dagger e_1^\dagger |2\mu^1\rangle$. On a $p = 0$ car $e_1 e_2^\dagger e_1^\dagger |2\mu^1\rangle \sim e_2^\dagger |2\mu^1\rangle = 0$. D'autre part, $q = 1$ car $2(2\mu^1 - \alpha_1 - \alpha_2) \cdot \alpha_1 = 1$. Donc les états $|2\mu^1 - \alpha_1 - \alpha_2\rangle$ et $e_1^\dagger |2\mu^1 - \alpha_1 - \alpha_2\rangle$ forment une représentation de spin $1/2$ du $su(2)$ associé à la racine α_1 . En fait, l'état

$$|2\mu^1 - 2\alpha_1 - \alpha_2\rangle' = \sqrt{2} e_1^\dagger |2\mu^1 - \alpha_1 - \alpha_2\rangle$$

coïncide avec l'état $|2\mu^1 - 2\alpha_1 - \alpha_2\rangle$ déjà trouvé : le poids $2\mu^1 - 2\alpha_1 - \alpha_2$ n'est pas dégénéré. En effet, un calcul direct montre que la matrice des produits scalaires des deux états en question,

$$|2\mu^1 - 2\alpha_1 - \alpha_2\rangle = e_2^\dagger e_1^\dagger e_1^\dagger |2\mu^1\rangle, \quad |2\mu^1 - 2\alpha_1 - \alpha_2\rangle' = 2e_1^\dagger e_2^\dagger e_1^\dagger |2\mu^1\rangle$$

est

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dès lors, ces deux vecteurs sont non seulement linéairement indépendants, mais aussi égaux. Le fait que le poids $2\mu^1 - 2\alpha_1 - \alpha_2$ est non dégénéré est une conséquence du fait qu'il est dans la même orbite de Weyl que le poids simple $|2\mu^1 - \alpha_1\rangle$. La chaîne de racines α_1 passant par $|2\mu^1 - \alpha_1 - \alpha_2\rangle \sim e_2^\dagger e_1^\dagger |2\mu^1\rangle$ ne donne donc rien de neuf. Reste à examiner la chaîne de racines α_1 passant par $|2\mu^1 - 2\alpha_1 - 2\alpha_2\rangle$. On a $p = 0$ et $q = 0$ car

$$q = 2(2\mu^1 - 2\alpha_1 - 2\alpha_2) \cdot \alpha_1 = 0$$

et donc aucun état nouveau n'apparaît ici non plus.

On a trouvé tous les états de la représentation $(2, 0)$, qui est six-dimensionnelle et également notée **6**.

La représentation complexe conjuguée $(0, 2) \equiv \bar{\mathbf{6}}$ a pour poids (non dégénérés) :

$$2\mu^2, \quad 2\mu^2 - \alpha_2, \quad 2\mu^2 - 2\alpha_2, \quad 2\mu^2 - \alpha_1 - \alpha_2, \quad 2\mu^2 - \alpha_1 - 2\alpha_2, \quad 2\mu^2 - 2\alpha_1 - 2\alpha_2.$$

6.1.3 La représentation 10

La représentation $(3, 0)$ est de dimension 10 (voir plus bas) et est donc aussi notée **10**. Le poids le plus haut est $3\mu^1$. L'état correspondant $|3\mu^1\rangle$ est annihilé par e_1 et e_2 . Il est aussi annihilé par e_2^\dagger tandis que e_1^\dagger , $(e_1^\dagger)^2$, $(e_1^\dagger)^3$ produisent des états non nuls de poids respectifs $3\mu^1 - \alpha_1$, $3\mu^1 - 2\alpha_1$ et $3\mu^1 - 3\alpha_1$. Les autres poids de la représentation sont $3\mu^1 - \alpha_1 - \alpha_2$, $3\mu^1 - 2\alpha_1 - \alpha_2$, $3\mu^1 - 2\alpha_1 - 2\alpha_2$, $3\mu^1 - 3\alpha_1 - \alpha_2$, $3\mu^1 - 3\alpha_1 - 2\alpha_2$, $3\mu^1 - 3\alpha_1 - 3\alpha_2$ et ils sont tous non dégénérés (exercice).

6.2 Méthodes tensorielles

6.2.1 Produit tensoriel

La méthode suivie ci-dessus pour construire les représentations de $su(3)$ à partir du vecteur de plus haut poids est très explicite mais aussi très lourde. Les méthodes tensorielles que nous allons développer sont beaucoup plus simples.

Un tenseur de type $\binom{m}{n}$ est un objet v à 3^{m+n} composantes $v_{j_1 \dots j_n}^{i_1 \dots i_m}$ ($i_k, j_k = 1, 2, 3$) qui se transforme comme suit sous $SU(3)$,

$$v \rightarrow v', \quad v_{j_1 \dots j_n}^{i_1 \dots i_m} = U_{k_1}^{i_1} \dots U_{k_m}^{i_m} v_{\ell_1 \dots \ell_n}^{k_1 \dots k_m} (U^{-1})_{j_1}^{\ell_1} \dots (U^{-1})_{j_n}^{\ell_n} \quad (6.9)$$

où $U \in SU(3)$. Pour les transformation de l'algèbre $su(3)$, $U = I + iu$,

$$v \rightarrow v' = v + i\delta v, \quad \delta v_{j_1 \dots j_n}^{i_1 \dots i_m} = \sum_{p=1}^m u_{k_p}^{i_p} v_{j_1 \dots j_n}^{i_1 \dots k_p \dots i_m} - \sum_{q=1}^n v_{j_1 \dots \ell_q \dots j_n}^{i_1 \dots i_m} u_{j_q}^{\ell_q} \quad (6.10)$$

Un tenseur de type $\binom{1}{0}$ est un vecteur et se transforme selon la représentation $\mathbf{3}$,

$$v' = Uv, \quad \delta v = uv.$$

Un tenseur de type $\binom{0}{1}$ est un covecteur et se transforme selon la représentation $\bar{\mathbf{3}}$ (car $(U^{-1})^t = U^*$),

$$v' = vU^{-1} = vU^\dagger, \quad \delta v = -vu.$$

Un tenseur de type $\binom{m}{n}$ se transforme donc selon

$$\underbrace{\mathbf{3} \otimes \dots \otimes \mathbf{3}}_{m \text{ fois}} \otimes \underbrace{\bar{\mathbf{3}} \otimes \dots \otimes \bar{\mathbf{3}}}_{n \text{ fois}}.$$

En particulier, un tenseur de type $\binom{1}{1}$ se transforme comme

$$v' = UvU^\dagger, \quad \delta v = uv - vu = [u, v].$$

On notera qu'un tenseur symétrique (antisymétrique) en des indices d'un même type garde cette propriété sous les transformations de $SU(3)$.

Produit scalaire hermitien

Soient u et v deux tenseurs du même type $\binom{m}{n}$. Le tenseur \bar{u} de composantes

$$\bar{u}_{i_1 \dots i_m}^{j_1 \dots j_n} = (u_{j_1 \dots j_n}^{i_1 \dots i_m})^*$$

est un tenseur de type $\binom{n}{m}$ et le produit scalaire hermitien

$$(u, v) = \bar{u}_{i_1 \dots i_m}^{j_1 \dots j_n} v_{j_1 \dots j_n}^{i_1 \dots i_m} \quad (6.11)$$

est donc préservé par les transformations de $SU(3)$ qui agit ainsi unitairement dans l'espace des tenseurs de type $\binom{m}{n}$ (quels que soient m et n).

6.2.2 Tenseurs invariants

Il y a trois tenseurs invariants indépendants pour $SU(3)$: δ^i_j (type $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$) qui est invariant car $[u, I] = 0 \quad \forall u$; ϵ^{ijk} (type $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$) et ϵ_{ijk} (type $\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$). Ces deux derniers tenseurs sont invariants car U est de déterminant unité (u de trace nulle). Comme les ϵ sont complètement antisymétriques, il suffit de vérifier $\delta\epsilon^{123} = 0$ et $\delta\epsilon_{123} = 0$. Faisons-le explicitement pour $\delta\epsilon^{123}$,

$$\delta\epsilon^{123} = u^1_i \epsilon^{i23} + u^2_i \epsilon^{1i3} + u^3_i \epsilon^{12i} = u^1_1 + u^2_2 + u^3_3 = 0.$$

Il en résulte en particulier que le produit tensoriel antisymétrique de la $\mathbf{3}$ avec la $\mathbf{3}$ est équivalent à la $\bar{\mathbf{3}}$ (à trois dimensions, un tenseur antisymétrique à 2 indices se transforme comme un covecteur, $A^{ij} = \epsilon^{ijk} \theta_k$).

6.2.3 Représentations tensorielles irréductibles

Vecteurs de plus haut poids de la $\mathbf{3}$ et de la $\bar{\mathbf{3}}$

Les générateurs e_a ($a = 1, 2, 3$) associés aux racines positives sont (à un facteur près)

$$e_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Les vecteurs w de plus haut poids de la représentation $\mathbf{3}$, annihilés par e_a ,

$$e_a w = 0$$

sont les multiples du vecteur

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

c'-à-d. les vecteurs ne possédant que la composante 1 différente de 0, $w^2 = w^3 = 0$. Les (co)vecteurs θ de plus haut poids de la représentation $\bar{\mathbf{3}}$, annihilés par e_a agissant à droite,

$$\theta e_a = 0$$

sont les multiples du covecteur

$$(0 \quad 1 \quad 0),$$

c'-à-d. les covecteurs ne possédant que la composante 2 différente de 0, $\theta_1 = \theta_3 = 0$. On a bien

$$h w = \mu_1(h) w$$

et

$$-\theta h = \mu_2(h) \theta.$$

Tenseurs irréductibles

L'espace vectoriel des tenseurs d'un type $\binom{m}{n}$ donné n'est pas irréductible. Pour obtenir des sous-espaces irréductibles, il faut imposer des conditions de symétrie et de trace.

Théorème : Le sous-espace invariant (m, n) des tenseurs de type $\binom{m}{n}$ complètement symétriques en leurs indices supérieurs, complètement symétriques en leurs indices inférieurs et de trace nulle,

$$v_{j_1 \dots j_n}^{i_1 \dots i_m} = v_{j_1 \dots j_n}^{(i_1 \dots i_m)} = v_{(j_1 \dots j_n)}^{i_1 \dots i_m}, \quad v_{i_1 i_2 \dots j_n}^{i_1 \dots i_m} = 0$$

est l'espace de la représentation irréductible de coefficients de Dynkin (m, n) .

Démonstration : On va montrer qu'il existe un et un seul vecteur de plus haut poids dans cet espace (à un multiple près). Soient $v_{j_1 \dots j_n}^{i_1 \dots i_m}$ les composantes d'un tenseur de type $\binom{m}{n}$ de plus haut poids obéissant aux conditions de symétrie et de trace. Montrons d'abord que les composantes avec un indice (1, 2 ou 3) répété en haut et en bas sont nulles,

$$v_{1 j_2 \dots j_n}^{1 i_2 \dots i_m} = v_{2 j_2 \dots j_n}^{2 i_2 \dots i_m} = v_{3 j_2 \dots j_n}^{3 i_2 \dots i_m} = 0.$$

A cet effet, considérons $\delta_1 v_{3 j_2 \dots j_n}^{1 i_2 \dots i_m}$ sous e_1 . On obtient

$$m_1 v_{3 j_2 \dots j_n}^{3 i_2 \dots i_m} - n_3 v_{1 j_2 \dots j_n}^{1 i_2 \dots i_m} = 0$$

où m_1 et n_3 sont respectivement les nombres d'indices supérieurs 1 et d'indices inférieurs 3 dans $v_{1 j_2 \dots j_n}^{1 i_2 \dots i_m}$. De même, sous e_2 ,

$$\delta_2 v_{2 j_2 \dots j_n}^{3 i_2 \dots i_m} = m_3 v_{2 j_2 \dots j_n}^{2 i_2 \dots i_m} - n_2 v_{3 j_2 \dots j_n}^{3 i_2 \dots i_m} = 0$$

et sous e_3 ,

$$\delta_3 v_{2 j_2 \dots j_n}^{1 i_2 \dots i_m} = m_1 v_{2 j_2 \dots j_n}^{2 i_2 \dots i_m} - n_2 v_{1 j_2 \dots j_n}^{1 i_2 \dots i_m} = 0.$$

Combinées avec la condition de trace

$$v_{1 j_2 \dots j_n}^{1 i_2 \dots i_m} + v_{2 j_2 \dots j_n}^{2 i_2 \dots i_m} + v_{3 j_2 \dots j_n}^{3 i_2 \dots i_m} = 0,$$

ces conditions impliquent le résultat annoncé.

Montrons à présent que tout tenseur de plus haut poids ne peut avoir de composante non nulle lorsque un (ou plus) des indices i_k ou j_k est égal à 3. On a en effet, si l'indice 3 apparaît comme indice supérieur (et donc pas en position inférieure),

$$\delta_1 v_{j_1 j_2 \dots j_n}^{1 i_2 \dots i_m} = m_1 v_{j_1 j_2 \dots j_n}^{3 i_2 \dots i_m} = 0.$$

De même,

$$\delta_2 v_{2 j_2 \dots j_n}^{i_1 i_2 \dots i_m} = -n_2 v_{3 j_2 \dots j_n}^{i_1 i_2 \dots i_m} = 0.$$

On montre de la même manière que l'indice 2 ne peut apparaître en position supérieure et que l'indice 1 ne peut apparaître en position inférieure, ce qui montre que la seule composante non nulle d'un tenseur de plus haut poids est

$$v_{22 \dots 22}^{11 \dots 11}.$$

Le sous-vectoriel des tenseurs de plus haut poids est donc de dimension un. En outre, on vérifie aisément que le poids correspondant est

$$\mu = m\mu^1 + n\mu^2$$

(le nombre de 1 est m , le nombre de 2 est n). Ceci achève la démonstration du théorème.

On trouve en particulier que la représentation **6** est donnée par les tenseurs $\binom{2}{0}$ symétriques, qui est bien à 6 dimensions, tandis que la **8** est donnée par les tenseurs mixtes de type $\binom{1}{1}$ de trace nulle.

Dimensions des représentations (m, n)

Le nombre de composantes indépendantes d'un tenseur $v_{j_1 \dots j_n}^{i_1 \dots i_m}$ complètement symétrique en ses indices supérieurs et en ses indices inférieurs est égal, sans la condition de trace, à

$$\frac{3 \cdot 4 \cdots (2+m)}{m!} \frac{3 \cdot 4 \cdots (2+n)}{n!} = \frac{(m+2)(m+1)(n+2)(n+1)}{4}.$$

La condition de trace $v_{i_1 i_2 \dots i_n}^{i_1 i_2 \dots i_m} = 0$ enlève

$$\frac{3 \cdot 4 \cdots (1+m)}{m!} \frac{3 \cdot 4 \cdots (1+n)}{n!} = \frac{(m+1)m(n+1)n}{4}$$

composantes indépendantes, ce qui implique que la dimension de la représentation (m, n) , égale à la différence de ces deux nombres, est donnée par

$$d_{(m,n)} = \frac{(m+1)(n+1)(m+n+2)}{2}. \quad (6.12)$$

En particulier, la $(3, 0)$ est bien de dimension 10.

6.2.4 Décomposition de Clebsch-Gordan

L'utilisation des tenseurs permet très facilement d'effectuer la décomposition d'un produit tensoriel. Par exemple, on a $\mathbf{3} \otimes \mathbf{3} = \mathbf{6} \oplus \bar{\mathbf{3}}$ (ce qu'on peut encore écrire $(1, 0) \otimes (1, 0) = (2, 0) \oplus (0, 1)$). En effet, on a

$$v^i u^j = \frac{1}{2} (v^i u^j + v^j u^i) + \frac{1}{2} \epsilon^{ijk} (\epsilon_{kpq} v^p u^q).$$

Un autre exemple est $\mathbf{3} \otimes \bar{\mathbf{3}} = \mathbf{8} \oplus \mathbf{1}$ (ou encore $(1, 0) \otimes (0, 1) = (1, 1) \oplus (0, 0)$), résultat que l'on tire de

$$v^i u_j = \left(v^i u_j - \frac{1}{3} \delta_j^i (v^k u_k) \right) + \frac{1}{3} \delta_j^i (v^k u_k).$$

Comme dernier exemple, considérons le produit $\mathbf{3} \otimes \mathbf{8}$. On a

$$v^i u_k^j = \frac{1}{2} M_k^{ij} + \frac{1}{4} \epsilon^{ijp} N_{pk} + \frac{1}{8} (3\delta_k^i P^j - \delta_k^j P^i)$$

où on a posé

$$M_k^{ij} = v^i u_k^j + v^j u_k^i - \frac{1}{4} \delta_k^i v^p u_p^j - \frac{1}{4} \delta_k^j v^p u_p^i,$$

$$N_{pk} = \epsilon_{pqr} v^q u_k^r + \epsilon_{kqr} v^q u_p^r,$$

et $P^j = v^k u_k^j$. Ceci implique $\mathbf{3} \otimes \mathbf{8} = \mathbf{15} \oplus \overline{\mathbf{6}} \oplus \mathbf{3}$ ou encore $(1, 0) \otimes (1, 1) = (2, 1) \oplus (0, 2) \oplus (1, 0)$.

Triarité

On notera que dans toute ces décompositions, $m - n$ est conservé modulo 3. Ceci est une conséquence du fait que $m - n$ faut zéro modulo 3 pour les tenseurs invariants utilisés pour effectuer la réduction. Cette propriété s'appelle la triarité.

6.3 Les poids de la représentation (m, n)

Considérons la représentation irréductible (m, n) de $su(3)$. Un tenseur $v = (v_{j_1 \dots j_n}^{i_1 \dots i_m})$ diagonalise l'action des générateurs de Cartan s'il ne possède qu'une seule composante non nulle. Le poids correspondant est $\nu = m_1 \mu^1 - m_2 \mu_2 - m_3 (\mu_1 - \mu_2) - n_1 \mu_1 + n_2 \mu^2 - n_3 (\mu_2 - \mu_1)$ où m_i est le nombre de fois que l'indice i apparaît en haut, tandis que n_i est le nombre de fois que l'indice i apparaît en bas. On a $m = m_1 + m_2 + m_3$ et $n = n_1 + n_2 + n_3$. Donc :

$$v \begin{array}{c} \overbrace{1 \dots 1}^{m_1 \text{ fois}} \overbrace{2 \dots 2}^{m_2 \text{ fois}} \overbrace{3 \dots 3}^{m_3 \text{ fois}} \\ \underbrace{1 \dots 1}_{n_1 \text{ fois}} \underbrace{2 \dots 2}_{n_2 \text{ fois}} \underbrace{3 \dots 3}_{n_3 \text{ fois}} \end{array} : \nu = [(m_1 - n_1) - (m_3 - n_3)] \mu_1 + [(n_2 - m_2) - (n_3 - m_3)] \mu_2 \quad (6.13)$$

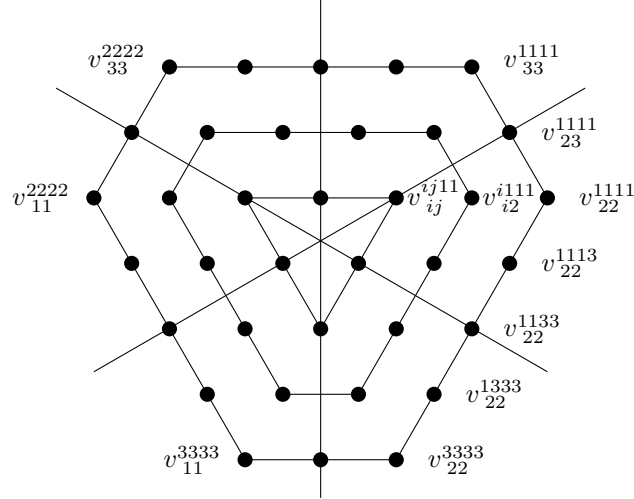
Utilisant les relations $\alpha_1 = 2\mu_1 - \mu_2$ and $\alpha_2 = 2\mu_2 - \mu_1$, on peut réécrire le poids ν en terme du plus haut poids $\mu = m\mu_1 + n\mu_2$ comme

$$\nu = m\mu_1 + n\mu_2 - m_2(\alpha_1 + \alpha_2) - m_3\alpha_1 - n_1(\alpha_1 + \alpha_2) - n_3\alpha_2. \quad (6.14)$$

Les tenseurs de plus haut poids n'ont qu'une seule composante non nulle, $v_{22 \dots 22}^{11 \dots 11}$. Quand on remplace un indice 1 supérieur par un indice 3, on soustrait la racine α_1 au poids. Quand on remplace un indice 1 supérieur par un indice 2, on soustrait la racine $\alpha_1 + \alpha_2$. Quand on remplace un indice 2 inférieur par un indice 3, on soustrait la racine α_2 . Et quand on remplace un indice 2 inférieur par un indice 1, on soustrait à nouveau la racine $\alpha_1 + \alpha_2$. Le poids le plus bas est obtenu en soustrayant $(m+n)(\alpha_1 + \alpha_2)$ à $m\mu_1 + n\mu_2$ et est égal à $-m\mu_2 - n\mu_1$ puisque $\alpha_1 + \alpha_2 = \mu_1 + \mu_2$. Il correspond à $v_{11 \dots 11}^{22 \dots 22}$.

Les poids se répartissent sur des hexagones (en général non réguliers) emboîtés, invariants par le groupe de Weyl. Ces hexagones peuvent dégénérer en triangles équilatéraux quand trois côtés se réduisent à un point. Les poids de la

représentation $(4, 2) = \mathbf{60}$ sont représentés ci-dessous. Il y a 36 poids distincts, mais certains de ceux-ci sont dégénérés.



La représentation $(4, 2) \equiv \mathbf{60}$

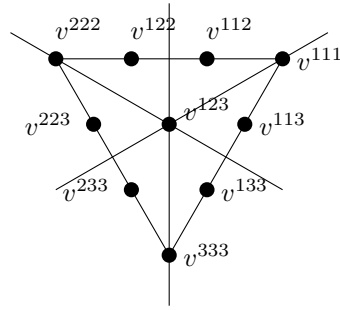
On a également représenté les axes des symétries engendrant le groupe de Weyl. A noter que dans v_{i2}^{i111} , l'indice i peut prendre deux valeurs distinctes ($i = 1, 2$), ce qui donne v_{12}^{1111} et v_{22}^{2111} . De même, dans v_{ij}^{ij11} , la paire symétrique (ij) peut prendre trois valeurs distinctes, $(ij) = (11), (12), (22)$, ce qui donne v_{11}^{1111} , v_{12}^{1211} et v_{22}^{2211} (voir discussion plus bas).

Hexagone extérieur

Pour comprendre la répartition des poids, partons du poids le plus haut $v_{22\dots22}^{11\dots11}$. On suppose d'abord $m > 0, n > 0$. En remplaçant un à un les indices 1 du haut par 3, on soustrait successivement $\alpha_1, 2\alpha_1, \dots, m\alpha_1$. Les poids correspondant se placent sur un segment de droite contenant $m+1$ poids, se terminant par $v_{22\dots22}^{33\dots33}$. Tous les tenseurs propres associés aux poids sur ce segment de droite ont tous leurs indices inférieurs égaux à 2. De même, en remplaçant un à un les indices 2 du bas par 3, on soustrait successivement $\alpha_2, 2\alpha_2, \dots, m\alpha_2$. Les poids correspondant se placent sur un segment de droite contenant $n+1$ poids, se terminant par $v_{33\dots33}^{11\dots11}$. Tous les tenseurs propres associés aux poids sur ce segment de droite ont tous leurs indices supérieurs égaux à 1. En utilisant le groupe de Weyl on engendre les 4 autres côtés de l'hexagone extérieur, qui contient ainsi $3(m+n)$ poids. Les tenseurs correspondant n'ont aucun indice répété en haut et en bas. Tous leurs indices supérieurs (ou inférieurs) sont égaux et distincts des indices inférieurs (ou supérieurs). Les poids de la couche extérieure sont non dégénérés. Le groupe de Weyl agit par permutation des indices 1, 2, 3. Dans le cas de la représentation $\mathbf{60}$, on a 18 poids.

Si m ou n est égal à zéro, l'hexagone extérieur dégénère en un triangle

équilatéral avec $3m$ (ou $3n$) poids distincts. Ceux-ci sont également non dégénérés. Les poids de la représentation $(3, 0) = \mathbf{10}$ sont représentés ci-dessous. Il y a au total 10 poids, dont 9 sont sur le triangle extérieur. Apparaissent également les axes de symétrie.



La représentation $(3, 0) \equiv \mathbf{10}$

“Couches intérieures”

Continuons l’analyse en supposant à nouveau $m > 0, n > 0$. Passons à la première couche intérieure, pour laquelle on a une seule répétition d’un indice du haut et d’un indice du bas. Cette répétition peut être celle de l’indice 1, de l’indice 2 ou de l’indice 3, mais ces trois possibilités ne sont pas indépendantes en raison de la condition de trace. Seules deux répétitions sont indépendantes, que l’on peut prendre $\frac{1}{1}$ et $\frac{2}{2}$. Partant du vecteur de plus haut poids $v_{22\dots22}^{11\dots11}$, on passe à la première couche intérieure en remplaçant soit un indice inférieur 2 par 1, ce qui donne $v_{12\dots22}^{11\dots11}$, soit un indice supérieur 1 par 2, ce qui donne $v_{22\dots22}^{21\dots11}$. Ces deux vecteurs ont même poids car, comme le montre explicitement la formule (6.13), les poids ne dépendent que des différences $m_i - n_i$. La troisième possibilité $v_{32\dots22}^{31\dots11}$ possède aussi le même poids mais n’est pas linéairement indépendante car

$$v_{32\dots22}^{31\dots11} = -v_{12\dots22}^{11\dots11} - v_{22\dots22}^{21\dots11}.$$

Le poids associé aux tenseurs $v_{12\dots22}^{11\dots11}$ et $v_{22\dots22}^{21\dots11}$, égal à $\mu - \alpha_1 - \alpha_2$, est donc dégénéré deux fois.

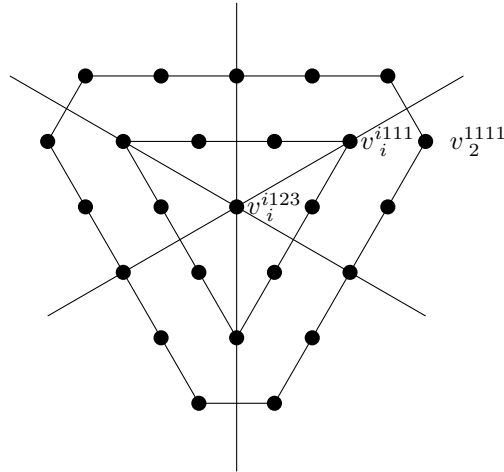
En partant du tenseur $v_{12\dots22}^{11\dots11}$, on peut engendrer tous les tenseurs à une seule répétition $\frac{1}{1}$ en remplaçant d’abord un à un les indices 1 “libres” du haut (non liés à la paire $\frac{1}{1}$) par 3, puis par 2. De même, on remplace un à un les indices 2 du bas par 3 et puis par 1. On engendre ainsi un hexagone comme si $v_{12\dots22}^{11\dots11}$ était le vecteur de plus haut poids de la représentation $(m - 1, n - 1)$. On

obtient exactement le même hexagone associé aux tenseurs à une seule répétition $\frac{2}{2}$ en partant de $v_{22 \dots 22}^{21 \dots 11}$. Le premier hexagone intérieur possède par conséquent $3(m+n-2)$ poids, tous dégénérés deux fois. Dans le cas de la représentation **60**, on a ainsi 12 poids sur l'hexagone intermédiaire, dégénérés deux fois.

On peut progresser de la même manière vers les couches intérieures plus profondes, qui contiennent de plus en plus de répétitions haut-bas. La k -ième couche intérieure contient k répétitions et est dégénérée $k+1$ fois (on compte la couche extérieure comme la couche numéro zéro). Elle est dégénérée $k+1$ fois car il y a $k+1$ manières de choisir k répétitions haut-bas : on peut répéter k 1's et 0 2's, $\frac{111 \dots 111}{111 \dots 111}$; $k-1$ 1's et un 2, $\frac{211 \dots 111}{211 \dots 111}$; $k-2$ 1's et 2 2's, $\frac{221 \dots 111}{221 \dots 111}$ etc.

Si $m = n$, les hexagones sont réguliers et le processus s'arrête après m pas vers l'intérieur à l'origine, correspondant aux tenseurs à m répétitions, dégénérés $m+1$ fois. Si $m \neq n$, on arrive à un triangle après n pas vers l'intérieur ($n < m$) ou m pas vers l'intérieur ($m < n$), possédant $3(m-n)$ poids, dégénérés $n+1$ fois ($n < m$) (ou $3(n-m)$ poids, dégénérés $m+1$ fois ($m < n$)). Dans le cas de la représentation **60**, on a ainsi 6 poids sur le triangle intérieur, dégénérés trois fois.

Supposons $m > n$ (si $m < n$, on considère la représentation complexe conjuguée qui a les mêmes propriétés). Pour comprendre ce qui se passe quand on passe d'un triangle au triangle intérieur suivant (s'il y en a un), oublions les répétitions $\frac{i}{i}$ éventuelles, qui jouent un rôle passif, et ne considérons que les indices libres (supérieurs) et appelons le premier triangle rencontré le triangle extérieur. Les tenseurs du triangle extérieur ne contiennent pas le triple 123. On passe d'un triangle au suivant en ajoutant un triple 123, ce qui se fait, partant de 111, en soustrayant la racine α_1 ($1 \rightarrow 3$) et puis la racine $\alpha_1 + \alpha_2$ ($1 \rightarrow 2$). Ceci est illustré sur les figures donnant les poids des représentations **10** et **35**.



La représentation $(4, 1) \equiv \mathbf{35}$

A noter qu'ici, $i_i = 1_1$ ou 2_2 ($v_i^{i111} = v_1^{1111}$ ou v_2^{2111} et $v_i^{i123} = v_1^{1123}$ ou v_2^{2123}).

On vérifie aisément que le diagramme des poids épuise toutes les composantes du tenseur $v_{j_1 \dots j_n}^{i_1 \dots i_m}$.

Règle de dégénérescence

On a démontré la règle de dégénérescence simple suivante : quand on passe d'une couche à la couche intérieure suivante, la dégénérescence des poids augmente de une unité, jusqu'au moment où on atteint une couche triangulaire, à partir de laquelle la dégénérescence reste constante.

A titre de vérification, notons qu'on retrouve les bonnes dimensions pour les représentations $(4, 2) \equiv \mathbf{60}$ ($60 = 18 + 2 \times 12 + 3 \times 6$), $(4, 1) \equiv \mathbf{35}$ ($35 = 15 + 2 \times 9 + 2 \times 1$) et $(3, 0) \equiv \mathbf{10}$ ($10 = 9 + 1$).

6.4 Théorème de Wigner-Eckart pour $su(3)$

Le théorème de Wigner-Eckart prend une forme particulièrement simple en termes de tenseurs. Soit $u = (u_{j_1 \dots j_n}^{i_1 \dots i_m})$ un tenseur de la représentation (m, n) , $v = (v_{j_1 \dots j_{n'}}^{i_1 \dots i_{m'}})$ un tenseur de la représentation (m', n') et $\Theta = (\Theta_{j_1 \dots j_{n''}}^{i_1 \dots i_{m''}})$ un opérateur tensoriel irréductible se transformant dans la représentation (m'', n'') . On sait que l'élément de matrice $(u, \Theta v)$ est non nul si et seulement si le produit tensoriel $(m', n') \otimes (m'', n'')$ contient (m, n) . On sait aussi que le nombre de constantes non fixées par la théorie des groupes est égal à la multiplicité de (m, n) dans $(m', n') \otimes (m'', n'')$. Il faut donc décomposer le produit $\Theta_{j_1 \dots j_{n''}}^{i_1 \dots i_{m''}} v_{\ell_1 \dots \ell_{n'}}^{k_1 \dots k_{m'}}$ en composantes irréductibles et déterminer s'il contient des tenseurs de type (m, n) dans sa décomposition. On extrait ces composantes irréductibles (m, n) en prenant le produit scalaire avec u .

Illustrons le théorème dans le cas où u , v et Θ se transforment tous les trois dans la $\mathbf{8}$. Le produit $\mathbf{8} \otimes \mathbf{8}$ à 64 dimensions se décompose en :

- la $(2, 2) \equiv \mathbf{27}$, obtenue en enlevant les traces de

$$\Theta_{(j}^{(i} v_{\ell)}^k);$$

- la $(1, 1) \equiv \mathbf{8}$ qui apparaît en prenant une trace ; elle apparaît deux fois car il y a deux manières de prendre une trace,

$$\Theta_{j}^{i} v_{i}^k \quad \text{et} \quad \Theta_{j}^{i} v_{\ell}^j;$$

- la $(1, 1) \equiv \mathbf{1}$ qui apparaît en prenant la double trace,

$$\Theta_{j}^{i} v_{i}^j;$$

- la $(3, 0) \equiv \mathbf{10}$ et la $(0, 3) \equiv \overline{\mathbf{10}}$, obtenues à partir de $\epsilon^{j\ell(m} \Theta_{j}^{i} v_{\ell}^k)$ et $\epsilon_{ik(m} \Theta_{j}^{i} v_{\ell}^k)$.

Ceci donne bien $27 + 2 \times 8 + 1 + 2 \times 10 = 64$ dimensions. On a par le théorème de Wigner-Eckart

$$(u, \Theta v) = \lambda_1 \bar{u}_k^j \left(\Theta^i_j v^k - \frac{1}{3} \delta_j^k \Theta^p_q v^q \right) + \lambda_2 \bar{u}_i^\ell \left(\Theta^i_j v^j - \frac{1}{3} \delta_\ell^i \Theta^p_q v^q \right)$$

Observant que les termes de trace s'en vont car u^i_j est sans trace et utilisant des notations matricielles, on obtient

$$(u, \Theta v) = \lambda_1 Tr(\bar{u}v\Theta) + \lambda_2 Tr(\bar{u}\Theta v). \quad (6.15)$$

Les $8 \times 8 \times 8 = 512$ éléments de matrice $(u, \Theta v)$ ne dépendent que de deux paramètres.

De la même manière, si u et v se transforment dans la **10** et Θ dans la **8**, on obtient

$$(u, \Theta v) = \lambda \bar{u}_{ijk} \Theta^i_\ell v^{\ell jk}$$

car le produit tensoriel $\mathbf{8} \otimes \mathbf{10}$ ne contient la **10** qu'une fois, déterminée par $\Theta_\ell^{(i} v^{jk)\ell}$. Les 800 éléments de matrice $(u, \Theta v)$ ne dépendent que d'un paramètre.

Annexe

Tenseurs complètement antisymétriques

On vérifie aisément que le nombre C_m^d de composantes indépendantes d'un tenseur complètement antisymétrique à m indices dans un espace de dimensions d , égal au nombre de m -suites (i_1, i_2, \dots, i_m) croissantes ($i_1 < i_2 < \dots < i_m$) comportant les nombres $\{1, 2, \dots, d\}$, est donné par

$$C_m^d = \frac{d(d-1) \cdots (d-m+1)}{m!}.$$

Tenseurs complètement symétriques

Le nombre A_m^d de composantes indépendantes d'un tenseur complètement symétrique à m indices dans un espace de dimensions d , égal au nombre de m -suites (i_1, i_2, \dots, i_m) non décroissantes ($i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_m$) comportant les nombres $\{1, 2, \dots, d\}$, obéit à la relation :

$$A_{m+1}^d = A_m^d + A_m^{d-1} + A_m^{d-2} + \dots + A_m^1$$

(examiner les différentes manières de commencer la $(m+1)$ -suite), d'où on tire

$$A_{m+1}^d = A_m^d + A_{m+1}^{d-1}.$$

La formule

$$A_m^d = \frac{d(d+1) \cdots (d+m-1)}{m!}$$

est vérifiée pour $d = 1$ et tout m ($A_m^1 = 1$) ainsi que pour tout d et pour $m = 1$ ($A_1^d = d$). Par récurrence, on en déduit que cette formule est vraie pour toute paire (d, m) .

Chapitre 7

Isospin - Hypercharge -Etrangeté

7.1 Isospin et étrangeté

Le lagrangien de la chromodynamique quantique (qui décrit les interactions fortes) possède une symétrie $SU(3)$ approchée car les quarks légers u , d et s (“up”, “down” et “strange”, “haut”, “bas” et “étrange”) possèdent des masses proches par rapport à l'échelle de masse Λ_{QCD} des hadrons (u : de 1,5 à 3,3 Mev ; d : de 3,5 à 6 Mev ; s : de 80 à 130 Mev ; par comparaison : c : de 1,15 à 1,35 Gev ; b : de 4,1 à 4,4 Gev et t : 173 ± 3 Gev). Le sous-groupe $SU(2)$ qui agit sur les quarks u et d est presque exact et appelé le sous-groupe d'isospin. Il est engendré par les générateurs T_1 , T_2 et T_3 (convention). Le générateur T_8 commute avec l'isospin.

Gell-Mann a imaginé que l'on pouvait diviser les interactions fortes en deux parties :

- les interactions très fortes (“very strong interactions”), qui sont invariantes sous $SU(3)$;
- les interactions moyennement fortes (“medium strong interactions”) qui brisent $SU(3)$ mais préservent l'isospin et le générateur T_8 .

(l'isospin lui-même est brisé par l'interaction électrofaible).

Il a montré que la symétrie $SU(3)$ permettait de comprendre de nombreuses propriétés des hadrons (baryons et mésons).

7.2 “The eight-fold way”

Les deux générateurs de Cartan de $SU(3)$ permettent d'associer deux nombres quantiques aux hadrons, à savoir l'isospin T_3 et l'hypercharge $Y \equiv 2T_8/\sqrt{3}$. L'hypercharge est reliée à l'étrangeté S et au nombre baryonique B par

$$Y = B + S. \tag{7.1}$$

TABLE 7.1 – Nombres quantiques des quarks u, d, s

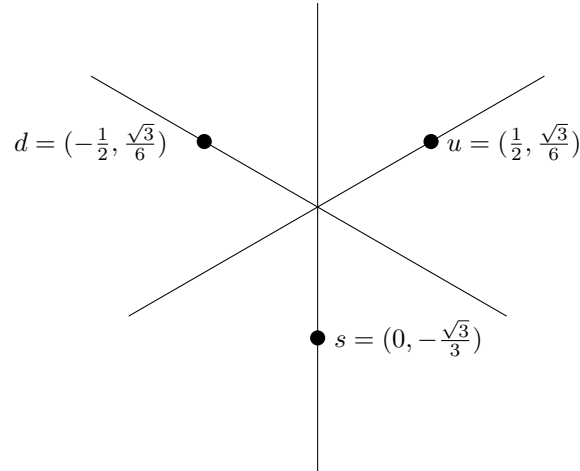
Quark	Isospin	Hypercharge	Etrangeté	Nombre baryonique	Charge électrique
u	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
d	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$
s	0	$-\frac{2}{3}$	-1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$

On a aussi l'équation

$$Q = T_3 + \frac{Y}{2} \quad (7.2)$$

qui relie la charge électrique à l'isospin et à l'hypercharge.

Les quarks u , s et d se transforment selon la $\mathbf{3}$ de $SU(3)$:



La représentation $(1,0) \equiv \mathbf{3}$

Ceci conduit aux nombres quantiques de la table 7.1.

Les mésons sont des états liés quark-antiquark, les baryons sont des états liés de trois quarks. Examinons l'octet des baryons contenant les nucléons. On a $\mathbf{3} \otimes \mathbf{3} \otimes \mathbf{3} = \mathbf{10} \oplus \mathbf{8} \oplus \mathbf{8} \oplus \mathbf{1}$ (exercice). A côté du proton et du neutron, qui ont étrangeté zéro et qui forment un doublet pour l'isospin, il y a les baryons étranges suivants qui ont des masses très proches :

- un isotriplet (représentation D_1 pour l'isospin) de baryons avec $S = -1$,

$$\Sigma^+ (I_3 = 1), \quad \Sigma^0 (I_3 = 0), \quad \Sigma^- (I_3 = -1), \quad (S = -1) \quad (7.3)$$

TABLE 7.2 – Nombres quantiques de l’octet des baryons

Baryon	Isospin	Hypercharge	Etrangeté	Nombre baryonique	Charge électrique
P	$\frac{1}{2}$	1	0	1	1
N	$-\frac{1}{2}$	1	0	1	0
Σ^+	1	0	-1	1	1
Σ^0	0	0	-1	1	0
Σ^-	-1	0	-1	1	-1
Λ	0	0	-1	1	0
Ξ^0	$\frac{1}{2}$	-1	-2	1	0
Ξ^-	$-\frac{1}{2}$	-1	-2	1	-1

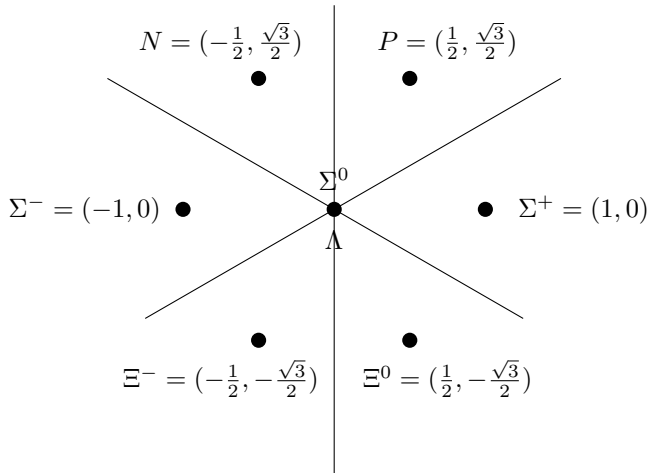
– un isosinglet (isospin 0) aussi d’étrangeté $S = -1$,

$$\Lambda \quad (I_3 = 0), \quad (S = -1), \tag{7.4}$$

– et un isodoublet (isospin 1/2) d’étrangeté $S = -2$,

$$\Xi^0 \quad (I_3 = \frac{1}{2}), \quad \Xi^- \quad (I_3 = -\frac{1}{2}), \quad (S = -2). \tag{7.5}$$

Ceci conduit aux nombres quantiques de la table 7.2.



La représentation $(1, 1) \equiv \mathbf{8}$

La représentation $\mathbf{8}$ est la représentation adjointe des tenseurs $\frac{1}{1}$. On peut représenter l’état le plus général de cette représentation comme un matrice 3×3

de trace nulle,

$$B = \begin{pmatrix} \frac{\Sigma^0}{\sqrt{2}} + \frac{\Lambda}{\sqrt{6}} & \Sigma^+ & P \\ \Sigma^- & -\frac{\Sigma^0}{\sqrt{2}} + \frac{\Lambda}{\sqrt{6}} & N \\ \Xi^- & \Xi^0 & -\frac{2\Lambda}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \quad (7.6)$$

où Σ^0 , Λ , P etc désignent les composantes selon les vecteurs propres de la représentation adjointe. [Si seule la composante P est différente de zéro, on a un proton car alors la matrice est égale à

$$P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = P(T_4 + iT_5) \quad (7.7)$$

qui est bien vecteur propre de T_3 et T_8 pour les valeurs propres $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ qui caractérisent le proton etc. A noter que l'on a normalisé les coefficients de telle sorte que

$$(B, B) = Tr(B^\dagger B) = (P)^2 + (N)^2 + (\Sigma^+)^2 + (\Sigma^0)^2 + (\Sigma^-)^2 + (\Lambda)^2 + (\Xi^0)^2 + (\Xi^-)^2 .]$$

7.3 La formule de masse de Gell-Mann Okubo

Les différence de masse entre les baryons de l'octet fondamental peuvent être comprises en terme de $SU(3)$. Il s'agit de calculer

$$(B, H_S B)$$

où H_S est l'hamiltonien des interactions fortes. Cet Hamiltonien peut être écrit comme la somme de deux termes,

$$H_S = H_{VS} + H_{MS} \quad (7.8)$$

où l'hamiltonien H_{VS} des interactions très fortes commute avec $SU(3)$ (et donc contribue la même constante pour tous les baryons de l'octet) et où l'hamiltonien H_{MS} des interactions moyennement fortes brise la symétrie $SU(3)$ et donne une différence de masse petite par rapport à $(B, H_{VS}B)$. L'hamiltonien H_{MS} commute avec le $SU(2)$ d'isospin et l'hypercharge. Gell-Mann a supposé (i) que H_{MS} est une des composantes d'un opérateur tensoriel O_j^i se transformant selon la $\mathbf{8}$ de $SU(3)$, et donc $O_j^i = \mu^a (T_a)^i_j$, $a = 1, \dots, 8$; et (ii) plus précisément, que H_{MS} se transforme comme T_8 , $(H_{MS})^i_j = \mu^8 (T_8)^i_j$. Cela implique $[H_{MS}, T_i] = 0$ pour les générateurs de $SU(2)$ et $[H_{MS}, Y] = 0$ pour l'hypercharge.

Par le théorème de Wigner-Eckart (6.15), on sait que les éléments de matrice $(B, H_{MS}B)$ ne dépendent que de deux paramètres,

$$(B, H_{MS}B) = x Tr(B^\dagger B T_8) + y Tr(B^\dagger T_8 B) \quad (7.9)$$

(pour la $\mathbf{8}$, $\bar{u} = u^\dagger$). Comme T_8 est diagonal, ceci donne

$$(B, H_{MSB}) = \frac{x}{\sqrt{12}} ((B^\dagger B)_1^1 + (B^\dagger B)_2^2 - 2(B^\dagger B)_3^3) + \frac{y}{\sqrt{12}} ((BB^\dagger)_1^1 + (BB^\dagger)_2^2 - 2(BB^\dagger)_3^3). \quad (7.10)$$

Développant les termes, on obtient

$$(B, H_{MSB}) = \frac{x}{\sqrt{12}} (|\Sigma|^2 + |\Xi|^2 - |\Lambda|^2 - 2|N|^2) + \frac{y}{\sqrt{12}} (|\Sigma|^2 + |N|^2 - |\Lambda|^2 - 2|\Xi|^2) \quad (7.11)$$

(par exemple,

$$(B^\dagger B)_1^1 = \left| \frac{\Sigma^0}{\sqrt{2}} + \frac{\Lambda}{\sqrt{6}} \right|^2 + |\Sigma^-|^2 + |\Xi^-|^2 \text{ etc}).$$

Dans (7.11), on somme sur les différents types de particules d'une même représentation d'isospin, e.g., $|N|^2$ est la somme sur les nucléons (proton et neutron). Ceci implique

$$\begin{aligned} M_N &= M_0 - \frac{2x}{\sqrt{12}} + \frac{y}{\sqrt{12}}, \\ M_\Sigma &= M_0 + \frac{x}{\sqrt{12}} + \frac{y}{\sqrt{12}}, \\ M_\Lambda &= M_0 - \frac{x}{\sqrt{12}} - \frac{y}{\sqrt{12}}, \\ M_\Xi &= M_0 + \frac{x}{\sqrt{12}} - \frac{2y}{\sqrt{12}}, \end{aligned}$$

où M_0 est la contribution commune de H_{VS} . Il y a 4 masses et 3 paramètres. On peut ainsi tirer une relation entre les 4 masses, qui est une conséquence directe de la symétrie

$$2(M_N + M_\Xi) = 3M_\Lambda + M_\Sigma. \quad (7.12)$$

C'est la formule de Gell-Mann-Okubo.

Elle est remarquablement précise. En effet, on peut la récrire de manière équivalente

$$M_\Lambda = \frac{1}{3} (2(M_N + M_\Xi) - M_\Sigma), \quad (7.13)$$

ce qui donne, tenant compte de

$$M_N = 940 \text{ Mev}, \quad M_\Sigma = 1190 \text{ Mev}, \quad M_\Xi = 1320 \text{ Mev},$$

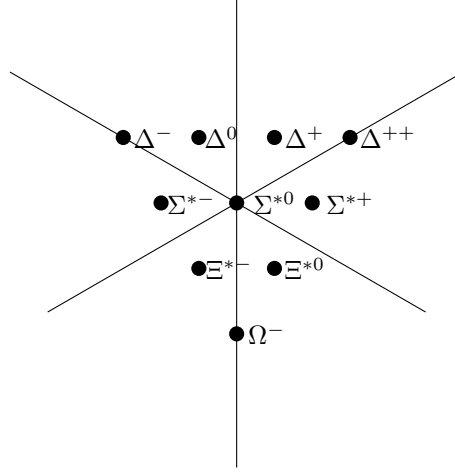
une masse pour la particule Λ égale à

$$M_\Lambda = 1110 \text{ Mev}. \quad (7.14)$$

La valeur expérimentale est de 1115 Mev.

Résonances hadroniques

A côté de l'octet des hadrons que nous venons de décrire, il existe un décuplet de résonances hadroniques



La représentation $(3, 0) \equiv \mathbf{10}$

Quand le groupe $SU(3)$ fut introduit dans l'étude des interactions fortes, le Ω^- n'avait pas encore été découvert. Gell-Mann a prédit l'existence de cette particule et ses nombres quantiques afin de compléter la représentation $\mathbf{10}$ (singlet d'isospin, $T_3 = 0$, et hypercharge $Y = -2$, donc $S = -3$ et $Q = -1$). Il a pu également prédire sa masse, en calculant $(B^*, H_{MS} B^*)$ comme ci-dessus, où B^* représente le décuplet. Il n'y a cette fois-ci qu'un seul paramètre et comme $H_{MS} \sim T_8 \sim Y$, les différences de masses entre les différentes représentations d'isospin sont égales,

$$M_{\Sigma^*} - M_{\Delta} = M_{\Xi^*} - M_{\Sigma^*} = M_{\Omega^-} - M_{\Xi^*}. \quad (7.15)$$

On a

$$M_{\Delta} = 1230 \text{ Mev}, \quad M_{\Sigma^*} = 1385 \text{ Mev}, \quad M_{\Xi^*} = 1530 \text{ Mev}$$

ce qui donne un espacement moyen de 150 Mev et donc une masse d'environ 1680 Mev pour le Ω^- , très proche de la valeur observée de 1672 Mev.

Cette prédiction fut un des triomphes de $SU(3)$.

Chapitre 8

Théorèmes de Classification

8.1 Système de racines

Les racines simples d'une algèbre de Lie compacte simple ont les propriétés suivantes :

1. Elles sont linéairement indépendantes.
2. L'angle entre deux racines distinctes α et β est égal à $\pi/2$, $2\pi/3$, $3\pi/4$ ou $5\pi/6$; en outre, les nombres $2\alpha \cdot \beta/\alpha^2$ sont des entiers non positifs.
3. Les racines simples définissent un diagramme de Dynkin connexe.

On exprime aussi le dernier point en disant que le système de racines est indécomposable. Si cette dernière propriété n'était pas satisfaite, alors, comme les racines d'un sous-système connexe sont toutes orthogonales aux racines d'un autre sous-système connexe, ces deux sous-systèmes définiraient des sous-algèbres qui commutent et l'algèbre ne serait pas simple.

On notera une propriété utile : un système de racines positives satisfaisant à la condition que $\alpha \cdot \beta \leq 0$ pour toute paire de racines distinctes est automatiquement linéairement indépendant.

8.2 Liste

VOIR REFERENCE DONNEE

8.3 Les algèbres de Lie classiques

VOIR REFERENCE DONNEE